LA SUITE DE FIBONACCI

ET LE NOMBRE D’OR

*Commentaires :*

*Activité en trois parties pouvant constituer un devoir à la maison sur le thème du nombre d’or.*

*Sont abordés : les fractions, les racines carrées, un peu de calcul littéral, de la géométrie (constructions, théorème de Pythagore, …)*

***A.*** *Suite de Fibonacci*

Au XIIIe siècle, dans son traité mathématique *Liber Abaci*, le mathématicien *Fibonacci* pose le problème suivant :

*« Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin de l'année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? »*

Les réponses constituent les nombres de la suite de *Fibonacci* : *1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - ...*

1) Expliquer ce résultat et compléter la suite de nombres de *Fibonacci* pour 1ère année.

2) Calculer les valeurs approchées à 10-3 près des quotients de deux nombres successifs de la suite de *Fibonacci* $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, … et comparer les résultats avec φ = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le *Nombre d'Or.*

***B.*** *Fractions à tous les étages*

1) Calculer la valeur exacte des quotients suivants :

$$A\_{1}=1+\frac{1}{2} A\_{2}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}} A\_{3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

2) Calculer la valeur exacte des quotients *A*4, *A5* et *A*6.

3) Calculer une valeur approchée à 10-3 près des résultats et comparer avec le *Nombre d'Or*.

***C.*** *Quelques égalités concernant le Nombre d'Or*

1) Prouver que φ est une solution de l'équation $x^{2}-x-1=0$.

2) Même question avec l’équation $\frac{1}{x}-x+1=0$.

***D.*** *Le Nombre d'Or en géométrie*

*Les deux parties qui suivent sont indépendantes.*

1ère partie :

1) AIJD est un carré de côté 10 cm. M est le milieu de [DJ] et C est le point de la demi-droite [DJ) tel que Ml = MC.

B est le point tel que ADCB soit un rectangle.

Calculer la valeur exacte de la longueur MI et en déduire la valeur exacte de la longueur du rectangle ADCB ?

2) Vérifier que le rapport « longueur sur largeur » du rectangle ADCB est égal à φ. Un tel rectangle est appelé *Rectangle d'Or*.

3) Prouver que IBCJ est un *Rectangle d'Or*.

2ème partie :

1) Quelle doit être la longueur d’un rectangle ABCD de largeur AD = 6 cm pour qu'il soit un *Rectangle d'Or* ? Donner la valeur exacte puis vérifier qu’une valeur approchée à 10-2 près centimètre est 9,71 cm.

2) Dessiner ce rectangle ABCD puis à l’intérieur les carrés AIJD, IBKL, KCNM, JNOP.

Dans chaque carré, tracer le quart de cercle de centre J, de rayon JD ; le quart de cercle de centre L, de rayon LI ; le quart de cercle de centre M, de rayon MK ; le quart de cercle de centre O, de rayon ON. Le résultat de la construction est une spirale appelée *Spirale d'Or*.

3) Prouver que la longueur de cette spirale est $3\sqrt{5}π$ cm.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)