SUITES DE MATRICES ET MARCHES ALEATOIRES

I. Suites de matrices colonnes

1) Exemples :

a) La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les suites numériques (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ et $v_n = 3n+1$.

b) Soit deux suites numériques couplées (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$, $v_0 = 4$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 1 \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 4 \end{cases}$

On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On pose encore : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, la relation matricielle de récurrence : $U_{n+1} = AU_n + B$.

En effet :

$$AU_n + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - 3v_n + 1 \\ -u_n + 5v_n - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

c) Soit une suite numérique (u_n) définie par une relation de récurrence d'ordre 2 : $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

On pose encore : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, la relation matricielle de récurrence : $U_{n+1} = AU_n$.

En effet, $AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 3u_n + 2u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$

2) Terme général d'une suite de matrices

Propriété : Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p telle que pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée de taille p.
Alors, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = A^n U_0$.

Démonstration :
On démontre cette propriété par récurrence.

- **Initialisation :** $U_0 = A^0 U_0$ car $A^0 = I_p$
- **Hérédité :**
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $U_k = A^k U_0$
  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang k + 1 : $U_{k+1} = A^{k+1} U_0$

$U_{k+1} = AU_k = A\left(A^k U_0\right) = \left(AA^k\right)U_0 = A^{k+1}U_0$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $U_n = A^n U_0$.

Méthode : Calculer des termes d'une suite à l'aide de matrices

Vidéo https://youtu.be/62U34KI4o1I

Soit deux suites numériques couplées (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 2v_n \end{cases}$

Calculer u_6 et v_6.

On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On pose encore : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, la relation matricielle de récurrence : $U_{n+1} = AU_n$.

On alors $U_n = A^n U_0$ et donc en particulier $U_6 = A^6 U_0$.
Soit en s'aidant de la calculatrice :

$$U_6 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^6 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2731 & -1365 \\ -2730 & 1366 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4096 \\ -4096 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $u_6 = 4096$ et $v_6 = -4096$.

II. Convergence de suites de matrices colonnes

Définitions : On dit qu'une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p est convergente si les p suites dont les termes sont les p coefficients de (U_n) sont convergentes.
La limite de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les p limites obtenues.
Dans tous les autres cas, on dit que la suite est divergente.

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/dbP7R-9Q2_s

a) La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 3n+1 = +\infty$.

b) La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{n^2+2}{n^2+1} \end{pmatrix}$ est convergente et sa limite est la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Propriété : (U_n) est une suite de matrices colonnes de taille p définie par la relation matricielle de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée de taille p et B est une matrice colonne à p lignes.
Si la suite (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant l'égalité $U = AU + B$.

Démonstration :
$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = U$ et $\lim_{n\to+\infty} AU_n + B = AU + B$. Par unicité des limites, on a $U = AU + B$.

Méthode : Recherche d'une suite constante vérifiant une relation de récurrence

Vidéo https://youtu.be/C-2-1yf-O4A

Soit une suite (U_n) de matrices colonnes définies pour tout entier naturel n par

$U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rechercher, si elle existe, la suite (U_n) constante.

Résolvons l'équation matricielle $U = AU + B$.
Soit $U - AU = B$ soit encore $(I_2 - A)U = B$

Et donc $U = (I_2 - A)^{-1} B$.

$$I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -0,5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

A l'aide la calculatrice, on obtient : $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -0,5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

Et donc : $U = (I_2 - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-13}{9} \\ \frac{-10}{9} \end{pmatrix}$.

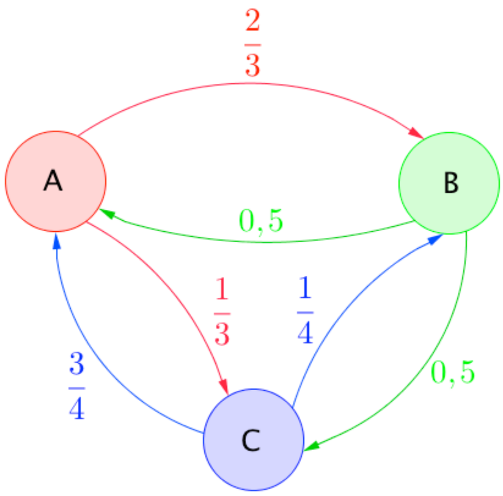
La suite (U_n) constante cherchée est donc $U_n = \begin{pmatrix} \frac{-13}{9} \\ \frac{-10}{9} \end{pmatrix}$.

III. Graphes et marches aléatoires

1) Graphe

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A, B et C.
Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont représentées sur le schéma suivant.
Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à $\frac{2}{3}$.

Un tel schéma est appelé un **graphe**. A, B et C sont appelés les **sommets du graphe**.



2) Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire X_n prenant les valeurs A, B ou C à l'étape n.
A, B ou C s'appelle les **états** de X_n.
Par exemple, $X_3 = B$ signifie que l'attaquant B possède le ballon après la 3e passe.
La suite de variables aléatoires (X_n) est appelée **marche aléatoire** sur l'ensemble des issues $\{A, B, C\}$.

Dans une marche aléatoire, l'état du processus à l'étape $n + 1$ ne dépend que de celui à l'état n, mais non de ses états antérieurs. Ainsi, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon ne dépend que de la position précédente du ballon (en A ou en B) mais non de ses positions antérieures.

3) Probabilité de transition

On considère la loi de probabilité de X_n, appelée **probabilité de transition**, qui donne la probabilité qu'un attaquant possède le ballon à l'étape n (n-ième passe).
On note par exemple $P_{X_n=A}(X_{n+1}=C)$ la probabilité que le ballon se trouve chez l'attaquant C après la n+1-ième passe sachant que c'est l'attaquant A qui envoie le ballon. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.

4) Matrice de transition

Définition : La matrice de transition d'une marche aléatoire est la matrice carrée dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité de transition du sommet j vers le sommet i.

Vidéo https://youtu.be/gmm_YF6QTIl

Dans l'exemple, la matrice de transition est :

Transition du sommet A vers les autres sommets

Transition du sommet C vers les autres sommets

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

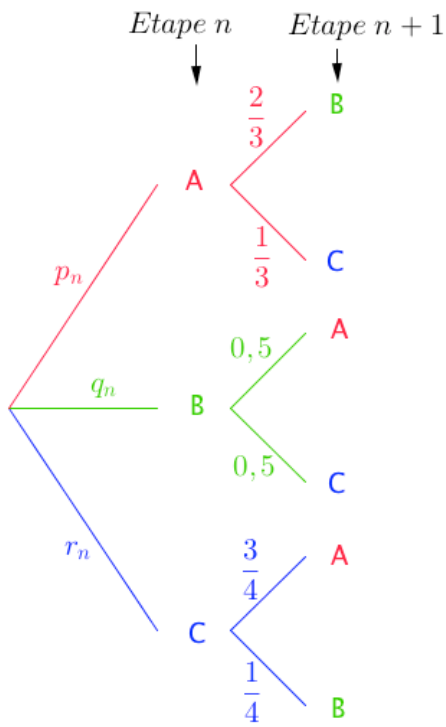
Transition du sommet B vers les autres sommets

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant A sachant qu'il se trouvait chez l'attaquant B.

Remarques :
- Le coefficient a_{11} de la matrice M est nul car la probabilité que l'attaquant A garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients a_{22} et a_{33}.
- La somme des coefficients d'une même colonne d'une matrice de transition est égale à 1.

Définition : La matrice colonne des états de la marche aléatoire après n étapes est la matrice colonne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Exemple :
Dans l'exemple des passeurs au football, la matrice colonne des états après la 3e étape donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant A, chez l'attaquant B et chez l'attaquant C après 3 passes.



L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de transition de l'étape n à l'étape n+1.

A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1}=0,5q_n+\frac{3}{4}r_n \\ q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+0,5q_n \end{cases}$$

On note $P_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des états de la marche aléatoire après n étapes. On a alors : $P_{n+1} = MP_n$.

Propriété : On considère une marche aléatoire de matrice de transition M et dont la matrice colonne des états à l'étape n est P_n.
Pour tout entier naturel n, on a : $P_{n+1} = MP_n$ et $P_n = M^n P_0$.

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/eePx5Skr1o0

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant A possède le ballon à l'étape 0.
La matrice colonne des états après la 3e étape est égale à : $P_3 = M^3 P_0$.

On a $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car le ballon part de A.

Avec la calculatrice, on obtient : $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{48} & \frac{17}{32} \\ \frac{17}{36} & \frac{7}{24} & \frac{17}{96} \\ \frac{17}{72} & \frac{17}{48} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$

Donc $P_3 = M^3 P_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{48} & \frac{17}{32} \\ \frac{17}{36} & \frac{7}{24} & \frac{17}{96} \\ \frac{17}{72} & \frac{17}{48} & \frac{7}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{17}{36} \\ \frac{17}{72} \end{pmatrix}$.

Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3e passe est égale à $\frac{17}{72} \approx 0,24$.

IV. Etude asymptotique d'une marche aléatoire

1) Marche aléatoire convergente

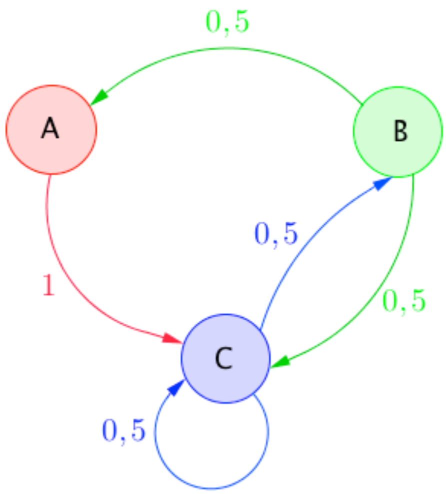
Définition : On dit qu'une marche aléatoire de matrice de transition M est convergente si la suite des matrices colonnes (P_n) des états de la marche aléatoire converge.

Définition : Si la suite (P_n) des états d'une marche aléatoire convergente vérifient $P_{n+1} = MP_n$ alors la limite P de cette suite définit un état stable solution de l'équation $P = MP$.

Méthode : Etudier le comportement asymptotique d'une marche aléatoire à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

Vidéo https://youtu.be/VoPxnfTMiPQ

On considère la marche aléatoire sur le graphe ci-dessous où l'on part de A :



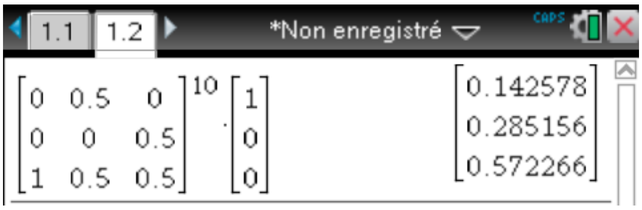
A l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette marche aléatoire. On admet que la marche aléatoire est convergente.

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on a : $P_{n+1} = MP_n$ où (P_n) est la suite des matrices colonnes des états de la marche aléatoire.

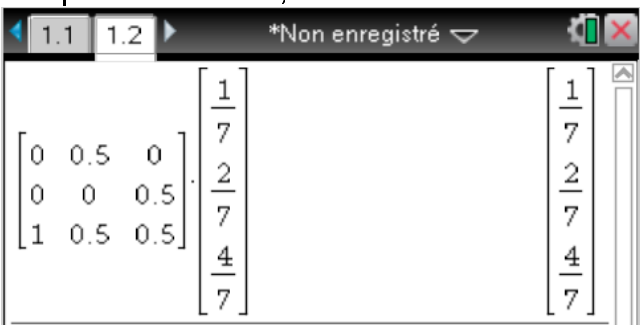
On a donc : $P_n = M^n P_0$ avec $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car on part de A.

A l'aide de la calculatrice, calculons par exemple P_{10} :



On peut effectuer les calculs pour des puissances de M de plus en plus grande. On constate que l'état stable semble être la matrice colonne $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\ \frac{2}{7}\\ \frac{4}{7}\end{pmatrix}$.

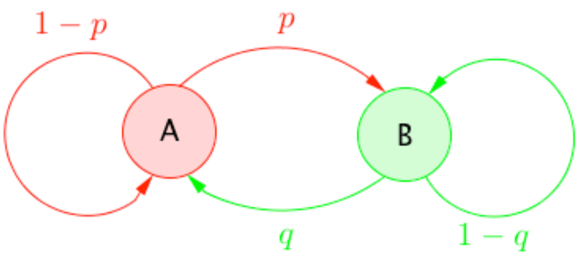
L'état stable P vérifie l'équation $P=MP$, en effet :



Remarque :
Cette méthode ne prouve pas que la marche aléatoire est convergente.
En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.

2) Cas d'un graphe à deux sommets

Propriété : On considère une marche aléatoire de matrice de transition M sur un graphe à deux sommets où $0<p<1$ et $0<q<1$:



Alors on a $M=\begin{pmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{pmatrix}$ et la suite des matrices colonnes (P_n) des états de la marche aléatoire converge vers un état stable P tel que $P=MP$.
P ne dépend pas de l'état initial P_0.

Démonstration :

Pour tout entier naturel n, on note $P_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ avec $p_n + q_n = 1$.

Comme $P_{n+1} = MP_n$, on a :
$p_{n+1} = (1-p)p_n + q \times q_n = (1-p)p_n + q(1-p_n) = (1-p-q)p_n + q$.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = p_n - \dfrac{q}{p+q}$ et on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{q}{p+q}$$
$$= (1-p-q)p_n + q - \frac{q}{p+q}$$
$$= (1-p-q)p_n - \frac{q(1-p-q)}{p+q}$$
$$= (1-p-q)\left(p_n - \frac{q}{p+q}\right)$$
$$= (1-p-q)u_n$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $1-p-q$.
Comme $0 < p+q < 2$, on a $|1-p-q| < 1$ et donc (u_n) converge vers 0.

D'où (p_n) converge vers $\dfrac{q}{p+q}$.

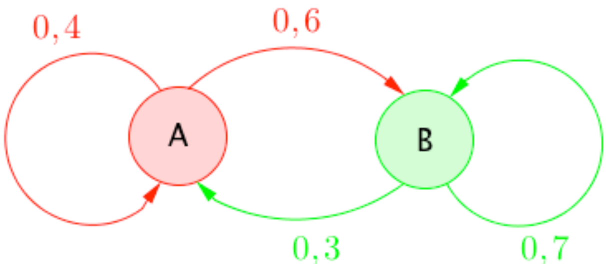
Comme $q_n = 1 - p_n$, (q_n) converge vers $\dfrac{p}{p+q}$.

Les limites de (p_n) et (q_n) ne dépendent donc pas de l'état initial.

Méthode : Etudier le comportement asymptotique d'une marche aléatoire sur un graphe à deux sommets

Vidéo https://youtu.be/eOvtoVT7hvs

On considère la marche aléatoire sur le graphe ci-dessous :



Etudier la convergence de la marche aléatoire.

La matrice de transition est $M=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on a : $P_{n+1}=MP_n$ où (P_n) est la suite des matrices colonnes des états de la marche aléatoire.

L'état stable $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ vérifie l'équation $P=MP$, soit $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a le système $\begin{cases} p=0{,}4p+0{,}3q \\ q=0{,}6p+0{,}7q \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}6p=0{,}3q \\ 0{,}3q=0{,}6p \end{cases}$

$\Leftrightarrow q=2p$

Comme $p+q=1$, on a $1-p=2p$ et donc $p=\frac{1}{3}$ et $q=\frac{2}{3}$.

L'état stable du graphe est donc $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Cela signifie que quelque soit l'état initial (départ de A ou de B), les probabilités d'être en A et en B tendent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.