FONCTION LOGARITHME NEPERIEN (Partie 2)

I. Etude de la fonction logarithme népérien

Vidéo https://youtu.be/3KLX-ScJmcI

1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $\left]0;+\infty\right[$.

- Admis -

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Démonstration :
Nous admettons que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$.

Posons $f(x) = e^{\ln x}$.

Alors $f'(x) = (\ln x)' e^{\ln x} = x(\ln x)'$
Comme $f(x) = x$, on a $f'(x) = 1$.

Donc $x(\ln x)' = 1$ et donc $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Exemple :

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$.

3) Convexité

Propriété : La fonction logarithme népérien est concave sur $\left]0;+\infty\right[$.

Démonstration :

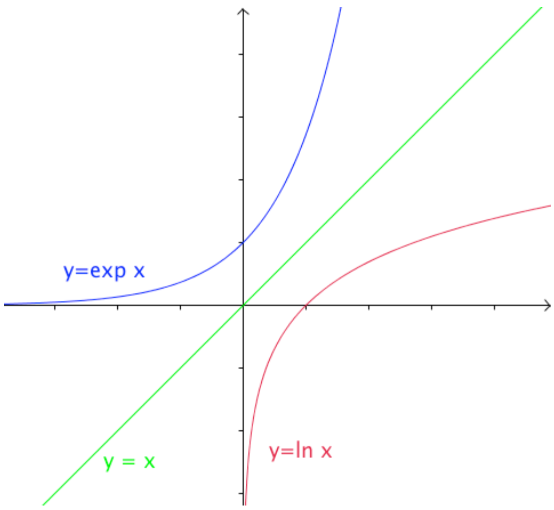
Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$ et donc la fonction logarithme népérien est concave sur cet intervalle.

4) Limites aux bornes

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

On peut justifier ces résultats par symétrie de la courbe représentative de la fonction exponentielle.



5) Tangentes particulières

Rappel : Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :
$y = f'(a)\left(x-a\right) + f(a)$.

Dans le cas de la fonction logarithme népérien, l'équation est de la forme :
$y = \frac{1}{a}\left(x-a\right) + \ln a$.

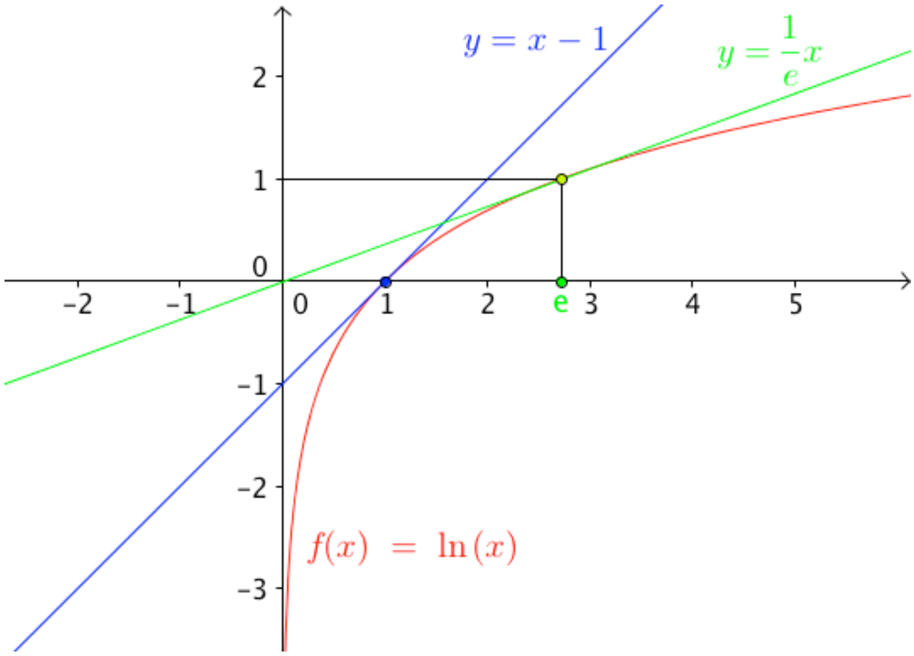
- Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{1}\left(x-1\right) + \ln 1$ soit : $y = x - 1$.
- Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{e}\left(x-e\right) + \ln e$ soit : $y = \frac{1}{e}x$.

6) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	||	+	
$\ln x$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$



Méthode : Etudier les variations d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y

1) Déterminer les variations de la fonction *f* définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln x$.
2) Etudier la convexité de la fonction *f*.

1) Sur $\left]0;+\infty\right[$, on a $f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$.
Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La fonction *f* est donc strictement croissante sur $\left]0;2\right]$ et strictement décroissante sur $\left[2;+\infty\right[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	$1+2\ln 2$	$\searrow$	

$f(2)=3-2+2\ln 2=1+2\ln 2$

2) Sur $\left]0;+\infty\right[$, on a $f''(x)=\dfrac{-1\times x-(2-x)\times 1}{x^2}=\dfrac{-x-2+x}{x^2}=-\dfrac{2}{x^2}<0$.

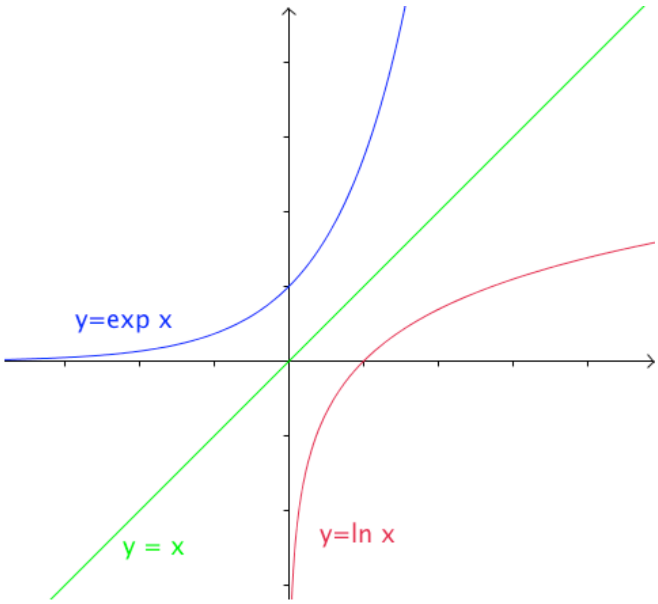
La fonction f' est donc décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$. On en déduit que la fonction f est concave sur $\left]0;+\infty\right[$.

II. Positions relatives

Vidéo https://youtu.be/RA4ygCI3ViE

Vidéo https://youtu.be/0hQnOs_hcss

Propriété : La courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite d'équation $y=x$.
La droite d'équation $y=x$ est au-dessus de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.



Démonstration :
- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x$.

$f'(x)=e^x-1$.

$f'(x)=0$
$\Leftrightarrow e^x-1=0$
$\Leftrightarrow e^x=1$
$\Leftrightarrow x=0$
On a également $f(0)=e^0-0=1>0$.
On dresse ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	1	↗	

On en déduit que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x)=e^x-x>0$ soit $e^x>x$

- On considère la fonction g définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $g(x)=x-\ln x$.

$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.
Comme $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$.
On a également $g(1)=1-\ln 1=1>0$.

On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	‖	↘	1	↗	

On en déduit que pour tout x de $\left]0;+\infty\right[$, on a $g(x)=x-\ln x>0$ soit $x>\ln x$.