LIMITES ET CONTINUITE
(Partie 2)

I. Limite d'une fonction composée

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x}}$.
On souhaite calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On considère les fonctions u et v définie par : $u(x)=2-\frac{1}{x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$.
Alors : $f(x)=v\left(u(x)\right)$. On dit alors que f est la composée de la fonction u par la fonction v.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=2$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{u(x)}=\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$.
D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$.

Théorème :
A, B, C peuvent désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to A}u(x)=B$ et $\lim\limits_{x\to B}v(x)=C$ alors $\lim\limits_{x\to A}v\left(u(x)\right)=C$.

- Admis -

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée
Vidéo https://youtu.be/DNU1M3li76k

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}$

- On commence par calculer la limite de la fonction $x\mapsto\frac{4x-1}{2x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{4x-1}{2x+3}=\frac{x}{x}\times\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)=4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{4}{2}=2$

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x+3}=2$.

- Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$.

- Comme limite de fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}=\sqrt{2}$.

II. Limites et comparaisons

1) Théorème de comparaison

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x>a$, on a $f(x)\leq g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ (figure 1)
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (figure 2)
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ (figure 3)
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

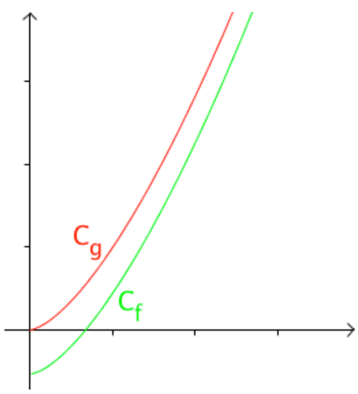


Figure 1

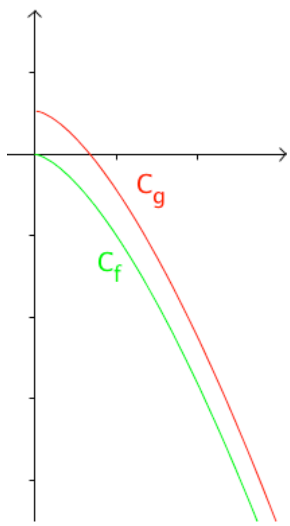


Figure 2

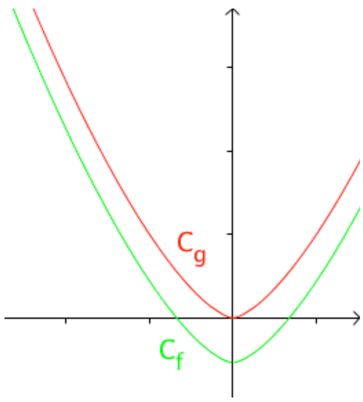


Figure 3

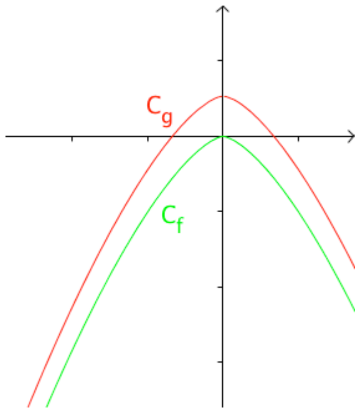


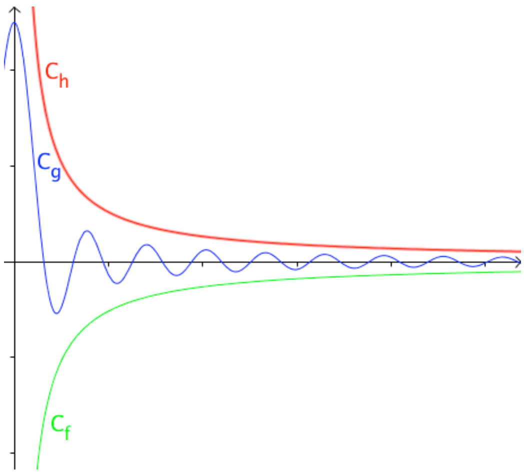
Figure 4

Démonstration dans le cas de la figure 1 :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m;+\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) \geq m$.
Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.
Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) \geq m$.
Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes : Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

Remarque : On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Vidéo https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y
Vidéo https://youtu.be/Eo1jvPphja0

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sin x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
Pour tout x, $-1\le\sin x$ donc $x-1\le x+\sin x$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1\right)=+\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sin x\right)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
Pour tout x, $-1\le\cos x\le 1$ donc $-x\le x\cos x\le x$, car x > 0.

Et donc $-\dfrac{x}{x^2+1}\le\dfrac{x\cos x}{x^2+1}\le\dfrac{x}{x^2+1}$

Ou encore $-\dfrac{x}{x^2}\le-\dfrac{x}{x^2+1}\le\dfrac{x\cos x}{x^2+1}\le\dfrac{x}{x^2+1}\le\dfrac{x}{x^2}$

Soit $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{x\cos x}{x^2+1}\le\dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}=0$.

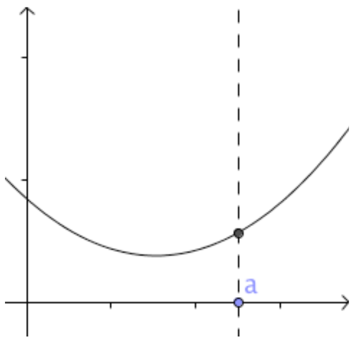
III. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

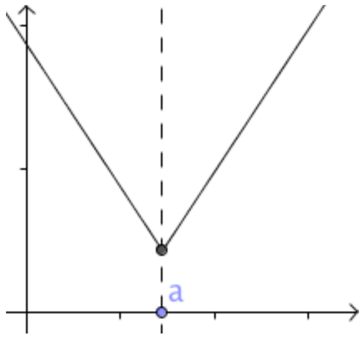
1) Continuité

Vidéo https://youtu.be/XpjKserte6o

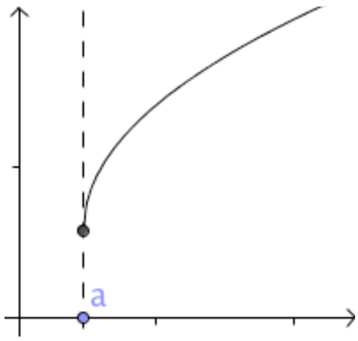
Exemples et contre-exemples :



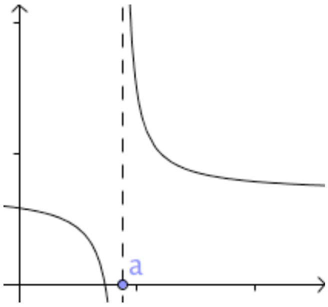
f est continue en a



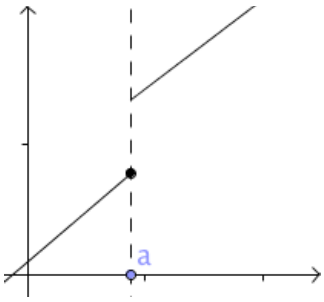
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel *a*.
- f est continue en *a* si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemples :

- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\left[0;+\infty\right[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$.

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

- Admis -

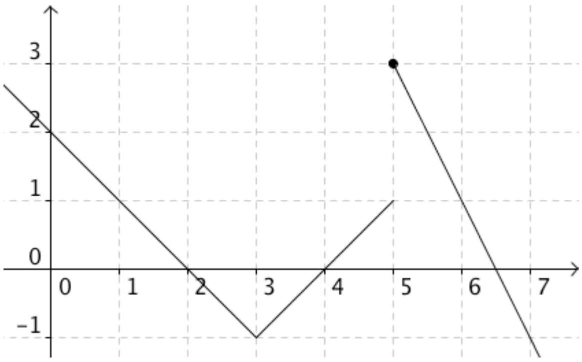
Méthode : Etudier la continuité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/03WMLyc7rLE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x<3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \geq 5 \end{cases}$.

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \mapsto -x+2$, $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $\left]-\infty;3\right[$, sur $\left[3;5\right[$ et sur $\left[5;+\infty\right[$.



Etudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (-x+2) = -3+2 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} (x-4) = 3-4 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = f(3)$ donc la fonction f est continue en 3.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} (x-4) = 5-4 = 1$

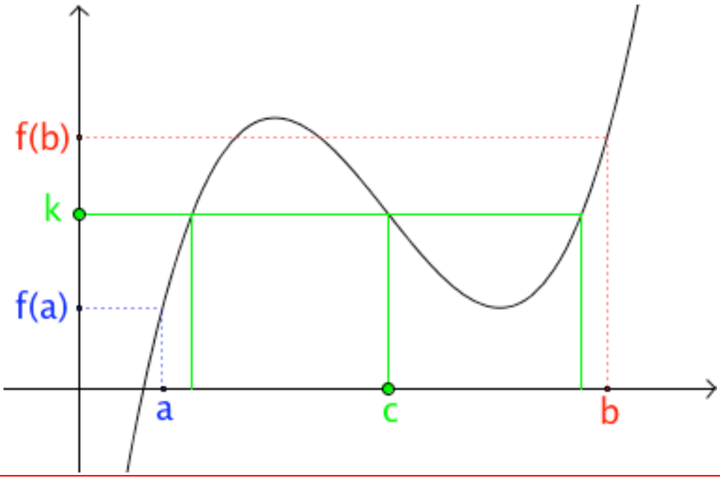
$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} (-2x+13) = -2 \times 5 + 13 = 3$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.
La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $\left]-\infty;5\right[$ et sur $\left[5;+\infty\right[$.

2) Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle [a ; b].
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.



- Admis -

Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle [a ; b].

Cas particuliers :
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle [a ; b] alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=0$.

Méthode : Résolution approchée d'une équation

Vidéo https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y
Vidéo https://youtu.be/UmGQf7gkvLg

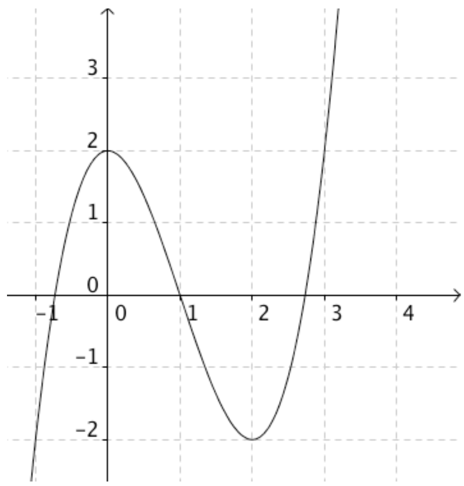
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.

1) - Existence : $f(2)=2^3-3\times 2^2+2=-2$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\times\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)=+\infty$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$ et elle change de signe.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c)=0$.

- <u>Unicité :</u> $f'(x)=3x^2-6x=3x\left(x-2\right)$
Donc, pour tout x de $\left]2;+\infty\right[$, $f'(x)>0$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]2;+\infty\right[$.



- On en déduit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c)=0$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Vidéo TI https://youtu.be/MEkh0fxPakk
Vidéo Casio https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ
Vidéo HP https://youtu.be/93mBoNOpEWg

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2{,}73 < c < 2{,}74$.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

TP Algorithmique "Dichotomie" :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_SolEqua.pdf