LIMITES ET CONTINUITÉ (Partie 1)

I. Limite d'une fonction à l'infini

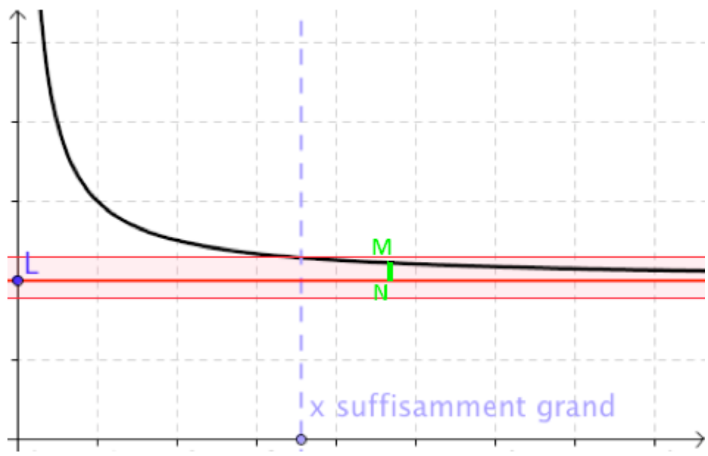
1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x)=2+\frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.



Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

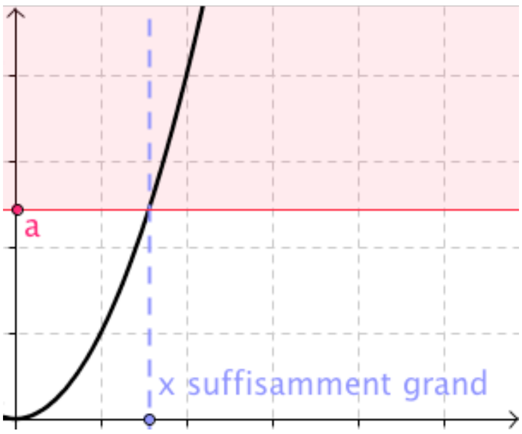
Définitions : - La droite d'équation $y=L$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.
- La droite d'équation $y=L$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

Remarque :
Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.
La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

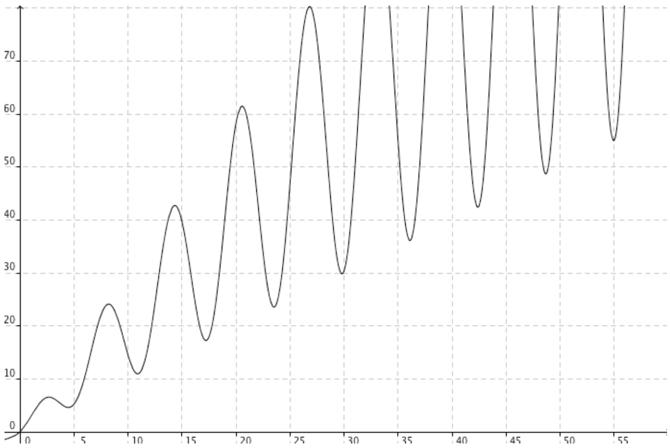
Exemple :
La fonction définie par $f(x)=x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.



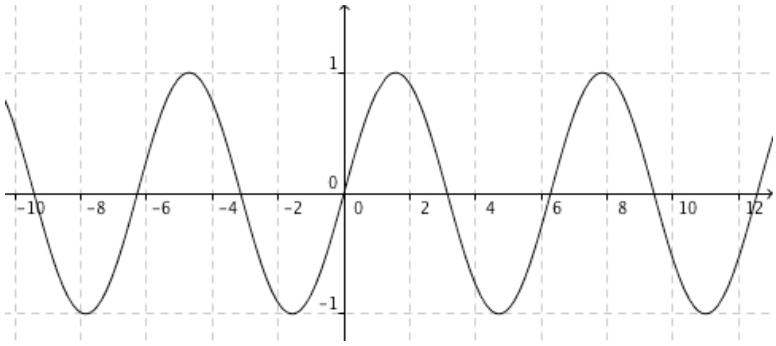
Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Remarques :
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :

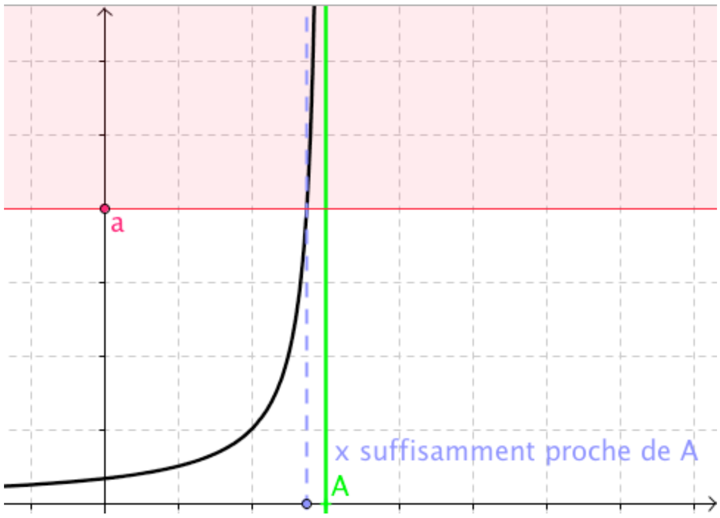
- $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

Exemple :
La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A.

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de *A*.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $\left]a;+\infty\right[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de *A*.



<u>Définitions :</u> - On dit que la fonction f <u>admet pour limite $+\infty$ en *A*</u> si tout intervalle $\left]a;+\infty\right[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de *A* et on note : $\lim\limits_{x\to A} f(x) = +\infty$

- On dit que la fonction f <u>admet pour limite $-\infty$ en *A*</u> si tout intervalle $\left]-\infty;b\right[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de *A* et on note : $\lim\limits_{x\to A} f(x) = -\infty$

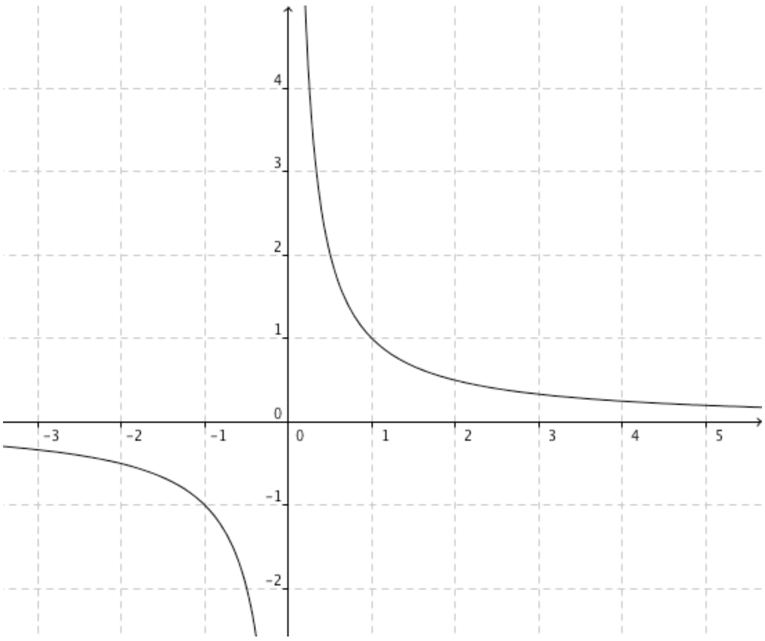
<u>Définition :</u> La droite d'équation $x = A$ est <u>asymptote</u> à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x\to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to A} f(x) = -\infty$.

<u>Remarque :</u>

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel *A* selon x > *A* ou x < *A*.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$.
- Si $x > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.



On parle de limite à gauche de 0 et de limite à droite de 0.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :
Vidéo https://youtu.be/9nEJCL3s2eU

III. Opérations sur les limites

Vidéo https://youtu.be/at6pFx-Umfs

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(f(x)+g(x)\right) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(f(x)g(x)\right) =$	$L\,L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}=$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$?

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+x^2)=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)=-\infty$

Remarque :
Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty",\ "0\times\infty",\ "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Vidéo https://youtu.be/4NQbGdXThrk
Vidéo https://youtu.be/8tAVa4itblc
Vidéo https://youtu.be/pmWPfsQaRWI

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x^2-6x+1\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x-1}$

1) Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$-\infty+(+\infty)+(-\infty)$"

Levons l'indétermination :

$$-3x^3+2x^2-6x+1=x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$.

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-3$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, on a par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x^2-6x+1\right)=-\infty$.

2) En appliquant la méthode de la question 1) pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, cela nous conduit à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0$.

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\frac{5}{x^2}\right)=6$.

Donc comme quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{1}{3}$.

3) Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{3x^2+2}{4x-1}=\frac{x^2}{x}\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)=4$.

Donc comme quotient de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=\frac{3}{4}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, donc comme produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} x\times\frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=-\infty$

Et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{4x-1}=-\infty$.

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

Vidéo https://youtu.be/n3XapvUfXJQ

Vidéo https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

1) Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$"

Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

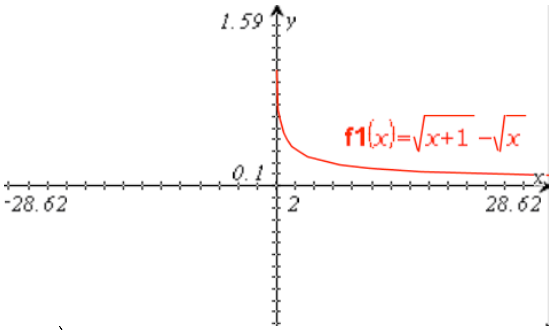
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$.

Et donc par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=0$.

On peut vérifier la pertinence du résultat en traçant la courbe représentative de la fonction $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.



2) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=\sqrt{5-1}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)=5-5=0$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

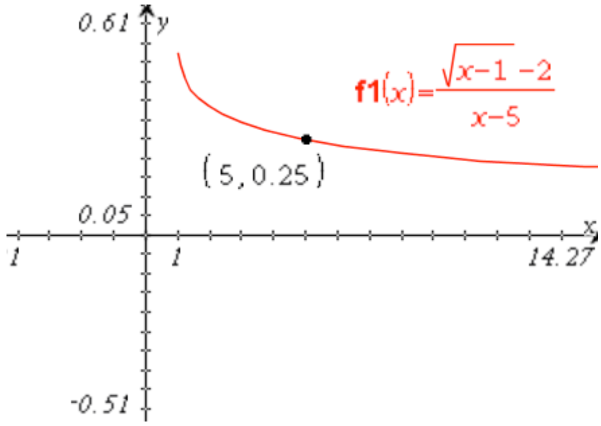
$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

Or $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-1}=\sqrt{5-1}=2$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-1}+2=2+2=4$.

Donc par quotient de limites, on a $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$.

Et donc $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{1}{4}$.

En traçant à l'aide de la calculatrice la fonction $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, il est possible de vérifier la pertinence de la solution trouvée en plaçant un point sur la courbe.
Attention cependant, la calculatrice ne fait pas apparaître que la fonction f n'est pas définie en 5.

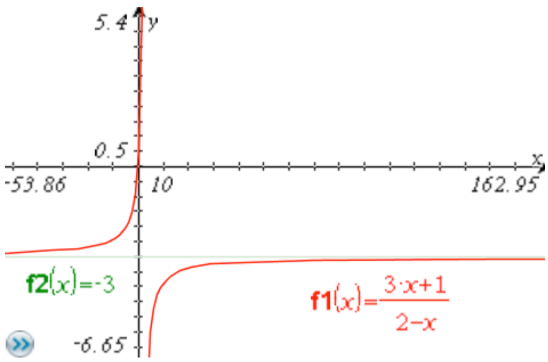


Méthode : Déterminer une asymptote

Vidéo https://youtu.be/0LDGK-QkL80
Vidéo https://youtu.be/pXDhrx-nMto

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$.
Démontrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Il faut donc démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{2-x}=-3$:



$$\frac{3x+1}{2-x}=\frac{x}{x}\times\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}-1\right)=-1$.

Et donc par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-3$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par $g(x)=\dfrac{2x}{x-4}$.

Démontrer que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.

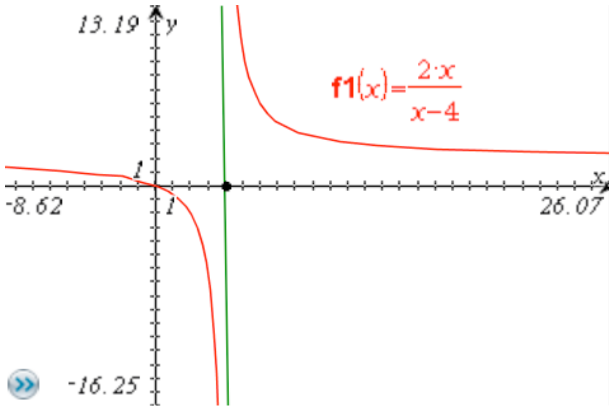
Il faut donc démontrer que la limite la fonction g possède une limite infinie en 4.

- $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}(x-4)=0$ et $\lim\limits_{x\to4}2x=8$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}\dfrac{2x}{x-4}=-\infty$ car $x-4<0$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}(x-4)=0$ et $\lim\limits_{x\to4}2x=8$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}\dfrac{2x}{x-4}=+\infty$ car $x-4>0$.



On en déduit que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.