INTÉGRATION
(Partie 2)

I. Calcul d'intégrales

1) Définition

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\,;\,b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a\,;\,b]$ la différence $F(b)-F(a)$ noté $\int_a^b f(x)\,dx$.

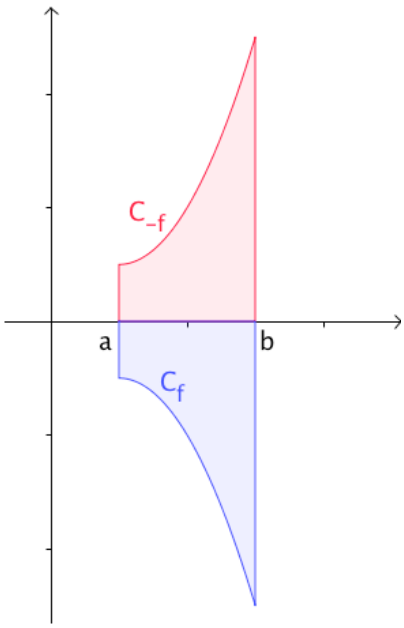
Remarque :
La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.
Ainsi pour une fonction f négative sur $[a\,;\,b]$, on peut écrire :

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

$= -\big(G(b)-G(a)\big)$ où G est une primitive de la fonction $-f$.

$= -\int_a^b \big(-f(x)\big)\,dx$

Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a\,;\,b]$.



Notations :
On écrit : $\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Vidéo https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw
Vidéo https://youtu.be/8ci1RrNH1L0
Vidéo https://youtu.be/uVMRZSmYcQE

Calculer : $A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx$

$B = \int_2^5 \left(3x^2+4x-5\right)dx$

$C = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$

$$A=\int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx$$
$$=\left[3\times\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^4$$
$$=\left[-\frac{3}{x}\right]_1^4$$
$$=-\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{1}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}+3$$
$$=\frac{9}{4}$$

$$B=\int_2^5\left(3x^2+4x-5\right)dx$$
$$=\left[x^3+2x^2-5x\right]_2^5$$
$$=5^3+2\times5^2-5\times5-\left(2^3+2\times2^2-5\times2\right)$$
$$=125+50-25-\left(8+8-10\right)$$
$$=144$$

$$C=\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1$$
$$=\frac{1}{-2}e^{-2\times1}-\frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^{2}$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$$

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) $\int_a^a f(x)\,dx=0$

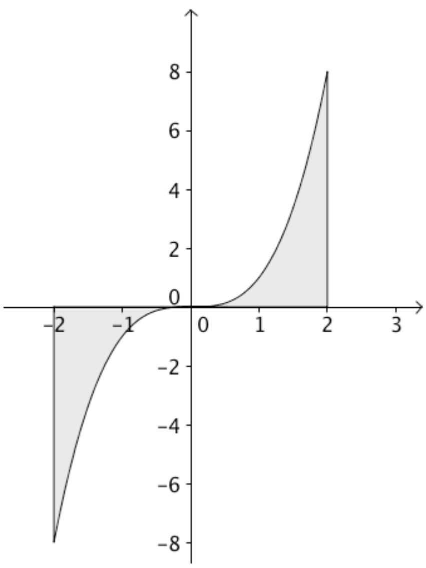
b) $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

a) $\int_a^a f(x)\,dx=F(a)-F(a)=0$

b) $\int_b^a f(x)\,dx=F(a)-F(b)=-\left(F(b)-F(a)\right)=-\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque :
Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.
Par exemple :

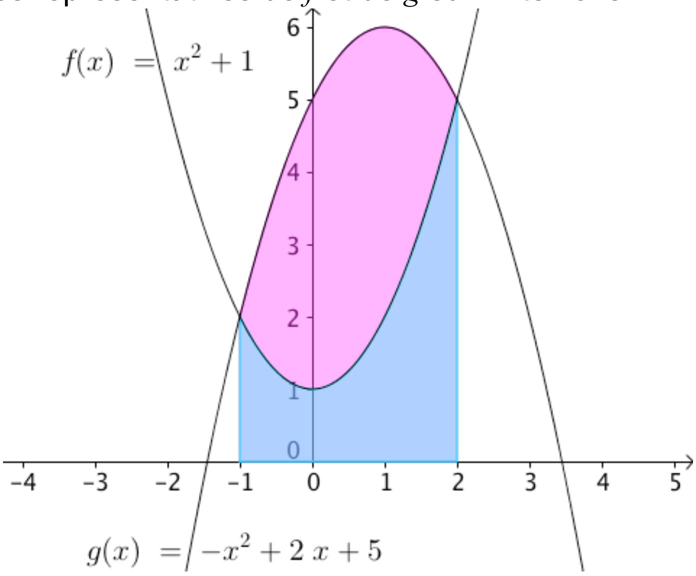
$\int_{-2}^2 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2=\frac{1}{4}\times2^4-\frac{1}{4}\times(-2)^4=4-4=0$.



Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

Vidéo https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ

On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=-x^2+2x+5$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $\left[-1;2\right]$.



On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f.

Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$\int_{-1}^{2} g(x)\,dx-\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+2x+5\right)dx-\int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x\right]_{-1}^{2}-\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\frac{1}{3}\times 2^3+2^2+5\times 2-\left(-\frac{1}{3}\left(-1\right)^3+\left(-1\right)^2+5\times\left(-1\right)\right)-\left[\left(\frac{1}{3}2^3+2\right)-\left(\frac{1}{3}\left(-1\right)^3+\left(-1\right)\right)\right]$$
$$=-\frac{8}{3}+4+10-\left(\frac{1}{3}+1-5\right)-\left[\frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}+1\right]$$
$$=-\frac{8}{3}+14-\frac{1}{3}+4-\frac{8}{3}-3-\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{18}{3}+15=9\,u.a.$$

2) Relation de Chasles

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I.

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration :

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$
$$=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$$
$$=F(b)-F(a)$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx$$

3) Linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :
On applique les propriétés sur les primitives :
- kF est une primitive de kf
- $F+G$ est une primitive de $f+g$

Méthode : Appliquer la linéarité

Vidéo https://youtu.be/9oZuouz32I4

Calculer : $\int_1^e \left(e^x - \frac{5}{x}\right)dx$

$$\begin{aligned}
&\int_1^e \left(e^x - \frac{5}{x}\right)dx \\
&= \int_1^e e^x\,dx - 5\int_1^e \frac{1}{x}\,dx \\
&= \left[e^x\right]_1^e - 5\left[\ln x\right]_1^e \\
&= e^e - e^1 - 5\left(\ln e - \ln 1\right) \\
&= e^e - e - 5
\end{aligned}$$

4) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \le b$.

a) Si, pour tout x de $\left[a;b\right]$, $f(x) \ge 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

b) Si, pour tout x de $\left[a;b\right]$, $f(x) \ge g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :
a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.
b) Si $f(x) \ge g(x)$ alors $f(x) - g(x) \ge 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx \geq 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

Vidéo https://youtu.be/VK0PvzWBIso

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.

a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

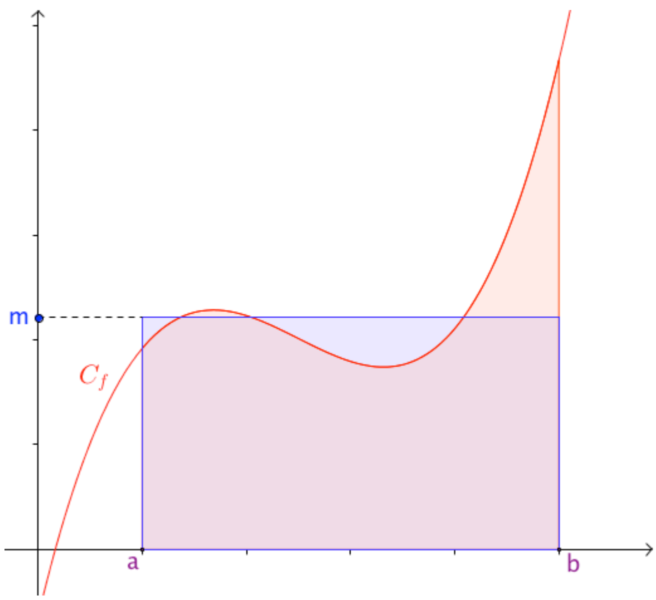
b) On déduit de la question précédente que $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$.

$\int_0^1 0\,dx = 0$ et $\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1$

D'où $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$

II. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec $a \neq b$.
On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b] le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.



Interprétation géométrique :
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).

Exemple :
Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [0 ; 10].

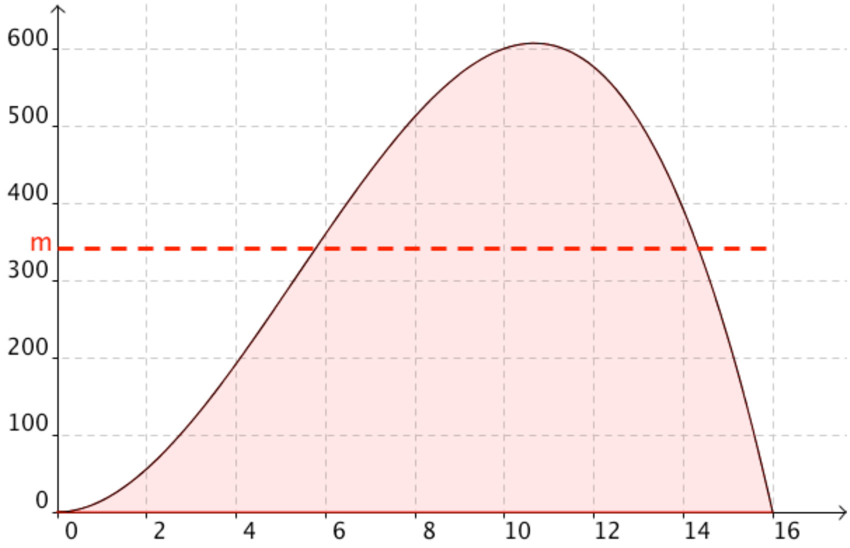
$$m = \frac{1}{10-0}\int_0^{10}\left(3x^2 - 4x + 5\right)dx$$
$$= \frac{1}{10}\left[x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^{10}$$
$$= \frac{1}{10}\left(1000 - 200 + 50\right)$$
$$= 85$$

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/WzV_oLf1w6U

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$m = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^{16}\left(16x^2 - x^3\right)dx$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16}$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4\right)$$
$$= \frac{16^3}{3} - \frac{16^3}{4}$$
$$= \frac{16^3}{12}$$
$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$



Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.