

INTÉGRATION (Partie 1)

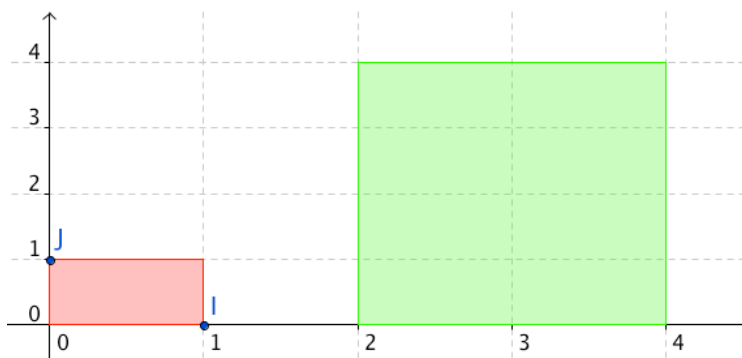


En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIV^e siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on parlait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).

Au milieu du XIX^e siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

I. Intégrale et aire

1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

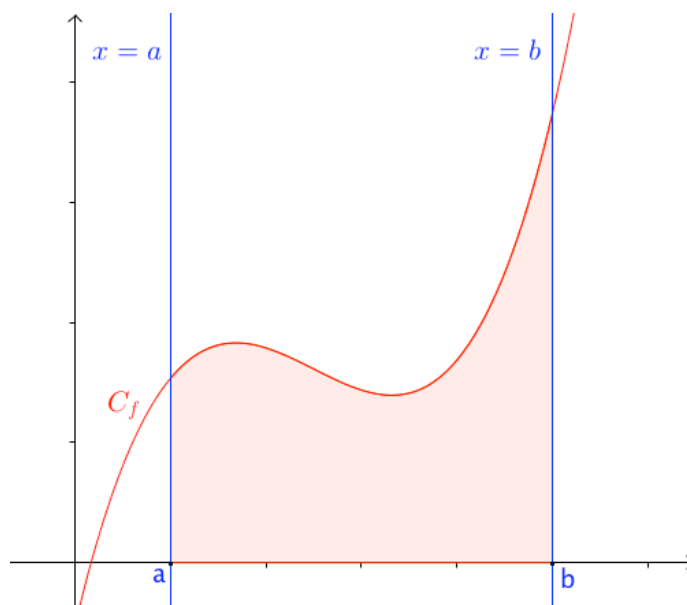
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle **intégrale de f sur $[a ; b]$** l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ se note : $\int_a^b f(x) dx$

Et on lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$ ".



Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.

Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Remarques :

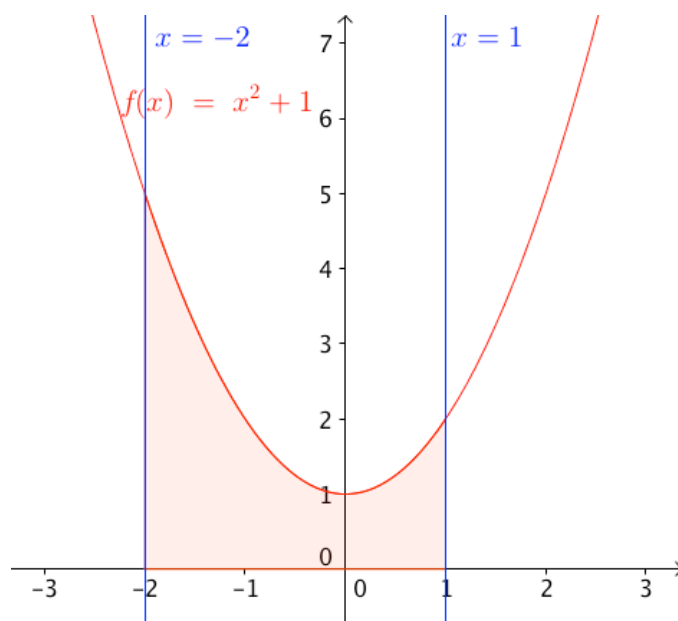
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

" dx " ou " dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 1]$ et se note $\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx$.



Un logiciel de calcul formel ou une calculatrice peut permettre d'obtenir l'aire cherchée.

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = 6$$

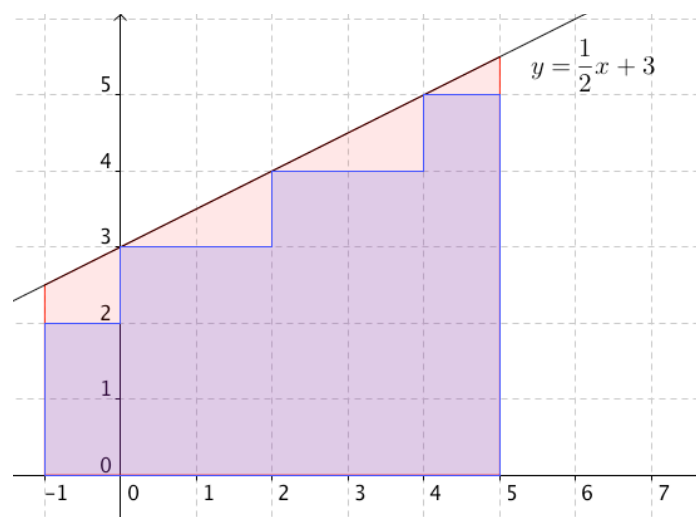
Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

► Vidéo <https://youtu.be/jkxNKkmEXZA>

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$.

a)



b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.

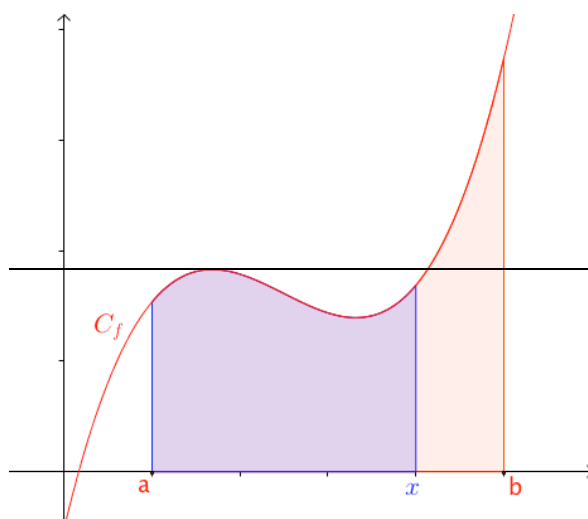
Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^5 f(x) dx = 21 \text{ u.a.} + 3 \text{ u.a.} = 24 \text{ u.a.}$

4) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et sa dérivée est la fonction f .

- Admis -



II. Primitive d'une fonction continue

1) Définition et propriétés

Exemple :

On considère les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + 3 \quad \text{et} \quad x \mapsto x^2 + 3x - 1$$

On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.

On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I , une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

" F a pour dérivée f " et " f a pour primitive F ".

Exemple :

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x .

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I .

Démonstration :

F est une primitive de f .

On pose $G(x) = F(x) + C$.

$$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Donc G est une primitive de f .

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, toute fonction de la forme $G_C(x) = \frac{x^2}{2} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, est une primitive de f .

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Admis -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 0$ entier	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$] 0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

3) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a ; b]$ alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :

$$-(F + G)' = F' + G' = f + g$$

$$-(kF)' = kF' = kf$$

4) Fonctions composées avec exponentielle

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive
$u' e^u$	e^u

Méthode : Recherche de primitives

▶ Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw

▶ Vidéo <https://youtu.be/82HYI4xuClw>

▶ Vidéo <https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ>

▶ Vidéo <https://youtu.be/iiq6eUQee9g>

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

a) $f(x) = 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

d) $f(x) = \frac{e^x}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

g) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

a) $F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 = x^5$

b) $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{3}{x}$

c) $F(x) = -2 \ln x$

d) $F(x) = \frac{1}{2} e^x = \frac{e^x}{2}$

e) $F(x) = \frac{1}{4} x^4 - x^2$

f) $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$ donc $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$

$$g) F(x) = x^3 - 3\left(-\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{3}{x}$$

5) Primitive prenant une valeur donnée

Exemple :

 **Vidéo** <https://youtu.be/-q9M7oJ9gkl>

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

Une primitive F de f est $F(x) = x^2 - 3x$.

La fonction f n'admet qu'une seule primitive G telle que $G(2) = 1$.

En effet, G est de la forme $G(x) = x^2 - 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Donc $G(2) = 2^2 - 3 \times 2 + C = 1$, et donc $C = 3$.

D'où $G(x) = x^2 - 3x + 3$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales