

GRAPHES (Partie 2)

I. Graphes orientés et graphes pondérés

1) Graphes orientés

Définitions : - Un graphe est orienté si ses arêtes, appelées arcs dans ce cas, ont un sens de parcours.

- Un chemin est une succession d'arcs mis bout à bout.

- Un circuit est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

Exemple :

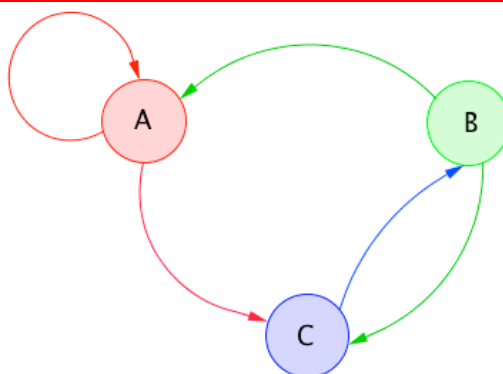
Le graphe orienté ci-contre est d'ordre 3 car il possède 3 sommets.

Il possède une boucle sur le sommet A.

A – C – B est un chemin de longueur 2.

B – C – B – A – A – C – B est un chemin fermé de longueur 6.

A – C – B – A est un circuit de longueur 3.



2) Graphes pondérés

Définitions : - Un graphe est étiqueté si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectés d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, ...)

- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit pondéré. Les étiquettes sont appelées les poids entre les sommets.

- Le poids du chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).

Exemple :

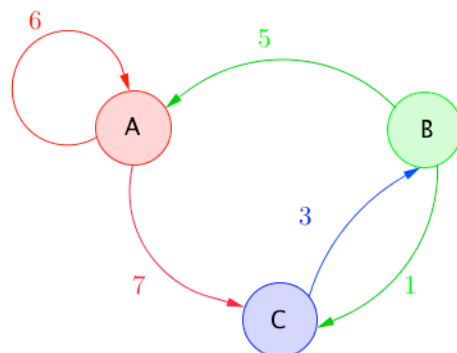
Le graphe orienté ci-contre est pondéré.

Le poids entre le sommet B et le sommet A est égal à 5.

Le poids du chemin B – C – B – A est égal à :

$$1 + 3 + 5 = 9$$

📺 Vidéo <https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4>



Remarque :

Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

3) Matrice associée à un graphe orienté

Définition : Soit un graphe G orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .

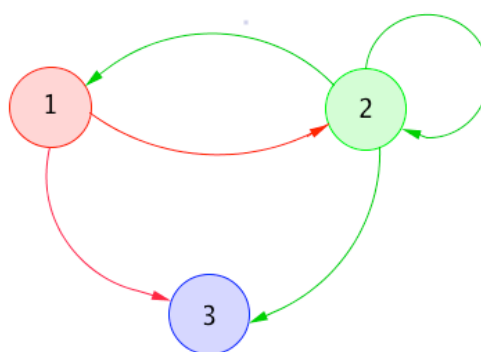
La matrice d'adjacence associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arcs orientés reliant les sommets i et j .

Exemple :

▶ Vidéo <https://youtu.be/yRBCx3uxN9A>

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

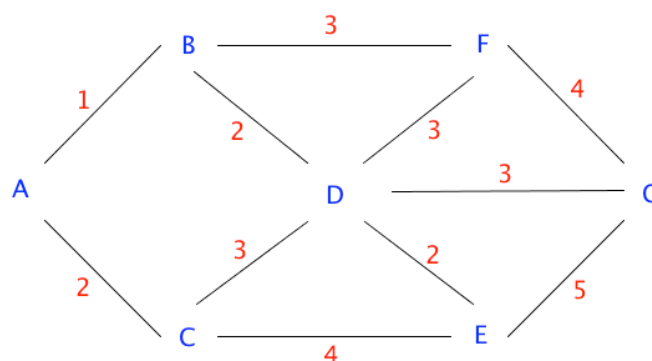


Méthode : Trouver le plus court chemin dans un graphe en utilisant l'algorithme de Dijkstra

▶ Vidéo <https://youtu.be/rHyICtXtdNs>

Le graphe ci-contre représente un réseau routier entre 7 villages A, B, C, D, E, F et G. Les étiquettes correspondent aux distances en kilomètres séparant deux villages.

On veut déterminer le chemin le plus court entre les villages A et G.



Il s'agit donc de déterminer le chemin reliant A et G dont le poids est minimum. On va utiliser l'algorithme de Dijkstra :

| A | B | C | D | E | F | G | Légende : |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-----------|
| 0 | 1 - A | 2 - A | | | | | (1) |
| | 1 - A | | 3 - B | | 4 - B | | (2) |
| | | 2 - A | 5 - C | 6 - C | | | (3) |
| | | | 3 - B | 5 - D | 6 - D | 6 - D | (4) |
| | | | | | 4 - B | 8 - F | (5) |
| | | | | 5 - D | | 10 - E | (6) |
| | | | | | | 6 - D | (7) |

Explications :

On complète le tableau dans l'ordre de la ligne (1) à la ligne (7) :

(1) : On part de A avec 0 km.

On ne reviendra plus en A, donc on colorie en bleu toute la colonne A.

Partant de A, pour aller en B, on a parcouru 1 km : d'où la notation "1 - A".

Partant de A, pour aller en C, on a parcouru 2 km : d'où la notation "2 - A".

(2) : On choisit le sommet B qui a la plus petite distance (1).

On ne reviendra plus en B, donc on colorie toute la colonne B.

Partant de B, pour aller en D, on a parcouru $1+2 = 3$ km.

Partant de B, pour aller en F, on a parcouru $1+3 = 4$ km.

(3) : On choisit le sommet C qui a la plus petite distance (2).
On ne reviendra plus en C, donc on colorie toute la colonne C.
Partant de C, pour aller en D, on a parcouru $2+3 = 5$ km.
Partant de C, pour aller en E, on a parcouru $2+4 = 6$ km.

(4) : On choisit le sommet D qui a la plus petite distance (3 en 2^e ligne).
On ne reviendra plus en D, donc on colorie toute la colonne D.
Partant de D, pour aller en E, on a parcouru $3+2 = 5$ km.
Partant de D, pour aller en F, on a parcouru $3+3 = 6$ km.
Partant de D, pour aller en G, on a parcouru $3+3 = 6$ km.

(5) : On choisit le sommet F qui a la plus petite distance (4 en 2^e ligne).
On ne reviendra plus en F, donc on colorie toute la colonne F.
Partant de F, pour aller en G, on a parcouru $4+4 = 8$ km.

(6) : On choisit le sommet E qui a la plus petite distance (5).
On ne reviendra plus en E, donc on colorie toute la colonne E.
Partant de E, pour aller en G, on a parcouru $5+5 = 10$ km.

(7) : On choisit le sommet G qui a la plus petite distance (6).

Le chemin le plus court est donc égal à 6 km.

Pour obtenir ce chemin, on suit "à l'envers" les correspondances du tableau :

Colonne G : 6 – D

Colonne D : 3 – B

Colonne B : 1 – A

Colonne A : 0

Le chemin le plus court est donc A – B – D – G.

II. Graphes probabilistes

1) Définition

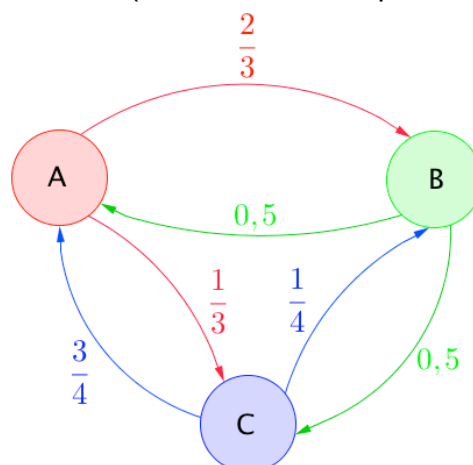
Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A , B et C .

Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont A , B ou C (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).

Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à $\frac{2}{3}$.

Les poids des arcs sont alors des probabilités.

Un tel schéma est appelé un **graphe probabiliste**.



Définition : Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égal à 1.

Par exemple, la somme des poids issus de A est égal à $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

3) Matrice de transition

Définition : Soit G un graphe probabiliste d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .

La matrice de transition de G est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j s'il existe et 0 dans le cas contraire.

▶ **Vidéo** https://youtu.be/KRi0C_zOsHs

Dans l'exemple, la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Transition du sommet A vers les autres sommets} \\ \leftarrow \text{Transition du sommet B vers les autres sommets} \\ \leftarrow \text{Transition du sommet C vers les autres sommets} \end{array}$$

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant B alors qu'il se trouvait chez l'attaquant A .

Remarques :

- Le coefficient a_{11} de la matrice M est nul car la probabilité que l'attaquant A garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients a_{22} et a_{33} .
- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

Définition : L'état probabiliste après n étapes est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

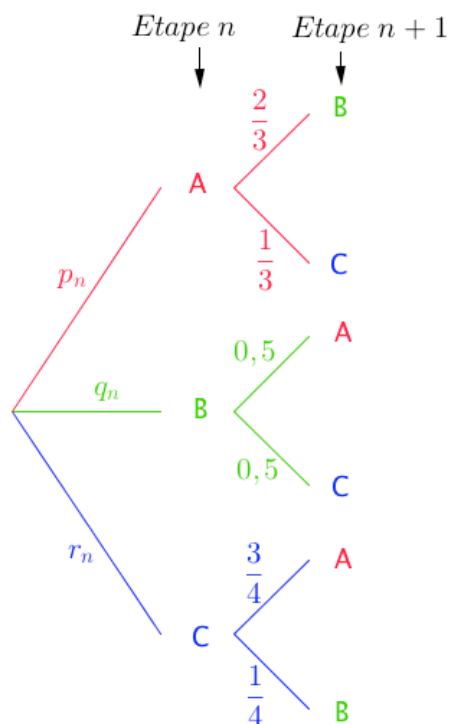
Exemple :

Dans l'exemple des passeurs au football, l'état probabiliste après 3 étapes donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant A , chez l'attaquant B et chez l'attaquant C après 3 passes.

L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de l'étape n à l'étape $n+1$.

A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,5q_n + \frac{3}{4}r_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 0,5q_n \end{cases}$$



On note $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste après n étapes.

On a alors : $P_{n+1} = P_n \times M$.

Propriété : On considère un graphe probabiliste de matrice de transition M et dont l'état probabiliste après n étapes est P_n .

Pour tout entier naturel n , on a : $P_{n+1} = P_n \times M$ et $P_n = P_0 \times M^n$ où P_0 est l'état initial.

- Admis -

Exemple :

Vidéo <https://youtu.be/gxrgpotHfnE>

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant A possède le ballon à l'étape 0.

La matrice ligne des états après la 3^e étape est égale à : $P_3 = P_0 \times M^3$.

On a $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car le ballon part de A .

$$\text{Avec la calculatrice, on obtient : } M^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \end{pmatrix}.$$

Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3^e passe est égale à $\frac{17}{72} \approx 0,24$.

4) Etat stable

Définition : Un état probabiliste est dit stable lorsqu'il n'évolue pas lors de répétitions de l'expérience.

Propriété : Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0.

L'état stable P vérifie alors l'égalité $P = P \times M$.

Et si n tend vers l'infini, alors l'état probabiliste P_n tend vers l'état stable P .

- Admis -

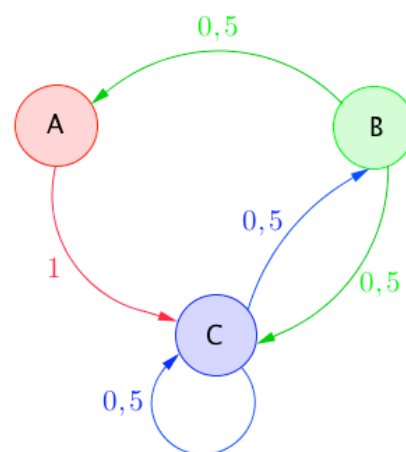
Exemple :

On considère le graphe probabiliste ci-contre :

Vérifions à l'aide de la calculatrice, que l'état stable est

la matrice ligne $P = \left(\frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{4}{7} \right)$.

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.



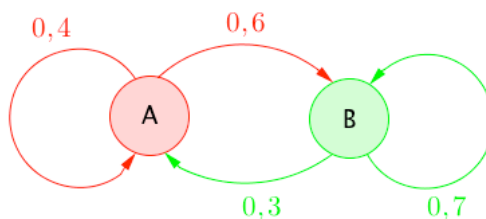
L'état stable P vérifie l'équation $P = P \times M$, en effet :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Méthode : Déterminer un état stable

📺 Vidéo <https://youtu.be/PS756B-M0Dw>

On considère le graphe probabiliste ci-dessous :



Déterminer l'état stable pour cette situation.

La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n , on a : $P_{n+1} = P_n \times M$ où (P_n) est la suite des états probabilistes.

L'état stable $P = (p \quad q)$ vérifie l'équation $P = P \times M$, soit

$$(p \quad q) = (p \quad q) \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a le système $\begin{cases} p = 0,4p + 0,3q \\ q = 0,6p + 0,7q \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6p = 0,3q \\ 0,3q = 0,6p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q = 2p$$

Comme $p + q = 1$, on a $1 - p = 2p$ et donc $p = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{2}{3}$.

L'état stable du graphe est donc $P = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right)$.

Cela signifie que quelque soit l'état initial (départ de A ou de B), les probabilités d'être en A et en B tendent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales