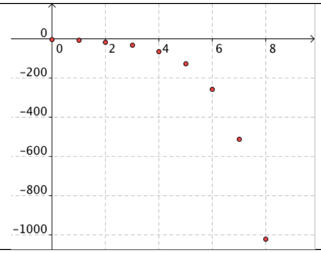
LES SUITES

Suite géométrique

	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q=2$ et $u_0=-4$
Définition	$u_{n+1}=q\times u_n$	$u_{n+1}=2\times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n=u_0\times q^n$	$u_n=-4\times 2^n$
Variations	Pour $u_0>0$: Si q > 1 : (u_n) est croissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est décroissante. Pour $u_0<0$: Si q > 1 : (u_n) est décroissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est croissante.	$u_0=-4<0$ $q=2>1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si q < 0 : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

Somme des termes d'une suite géométrique : $1+q+q^2+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Limite d'une suite géométrique

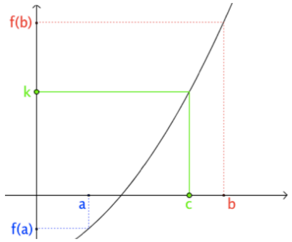
q	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=$	0	1	$+\infty$

Suite arithmético-géométrique

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n, on a : $u_{n+1}=au_n+b$.

CONTINUITÉ ET DERIVATION

Continuité



Théorème des valeurs intermédiaires :
f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k **compris** entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur $[a\,;\,b]$.

Dérivation

Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L.
Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

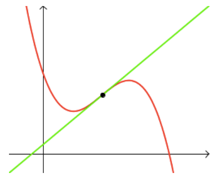
Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
ku, $k\in\mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n\in\mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$

Convexité

1) La fonction f est **convexe** si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
2) La fonction f est **concave** si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

Propriété : 1) La fonction f est convexe si sa dérivée f' est croissante, soit $f''(x)\geq 0$.
2) La fonction f est concave si sa dérivée f' est décroissante, soit $f''(x)\leq 0$.

Définition : Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

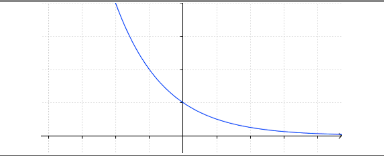
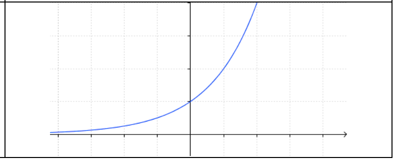


FONCTION EXPONENTIELLE

Fonction exponentielle de base q

Propriétés : 1) $q^0 = 1$, $q^1 = q$ 2) $q^{x+y} = q^x \times q^y$, $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$, $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$, $\left(q^x\right)^n = q^{nx}$ $n \in \mathbb{Z}$

Variations de la fonction exponentielle de base q :

$0 < q < 1$	$q > 1$
$x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = +\infty$
	

Fonction exponentielle de base e

Propriétés : 1) $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2{,}718$

2) $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,

$\left(e^x\right)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

3) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Limites

Limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Dérivées

$(e^x)' = e^x$ et $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

FONCTION LOGARITHME

Propriétés : 1) ***ln*** est défini sur $]0;+\infty[$

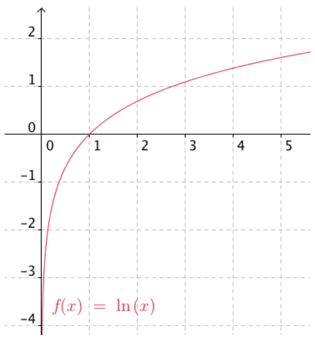
2) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

3) $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$; $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$; $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

4) $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$ et $\ln x^n = n \ln x$ avec $n \in \mathbb{Z}$

5) $y = \ln x \text{ avec } x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$; $\ln e^x = x$; $e^{\ln x} = x$

6) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ et $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$



Limites

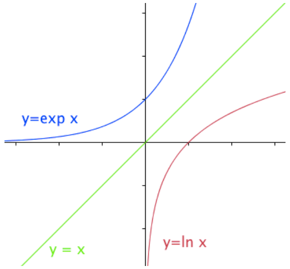
Limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$

Dérivée

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Positions relatives

Propriétés : La courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite d'équation $y = x$.
La droite d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.



INTEGRATION

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
On appelle **intégrale de f sur $[a ; b]$** l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Définition : On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F telle que $F' = f$

Fonction	Une primitive
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$

Fonction	Une primitive
$u'u^n$ $n \neq -1$ entier	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u

Propriété : Si F est une primitive de f alors $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f.

Propriété : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Propriétés : 1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

2) Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

3) Linéarité : Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

4) Si $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Si $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

PROBABILITÉS

Conditionnement

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Loi de probabilité à densité

Pour une **fonction de densité (ou densité)** f, on a : $P\left(X\in\left[a;b\right]\right)=\int_a^b f(t)\,dt$

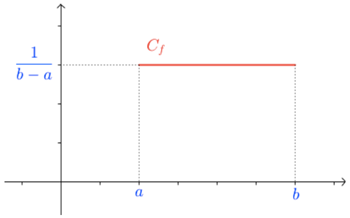
Espérance : $E(X)=\int_a^b t\,f(t)\,dt$.

Loi uniforme

Loi uniforme $U\left(\left[a;b\right]\right)$ de densité $f(x)=\frac{1}{b-a}$

On a : $P(a\le X\le x)=\frac{x-a}{b-a}$

et l'espérance est égale à : $E(X)=\frac{a+b}{2}$

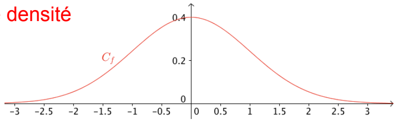


Loi normale centrée réduite

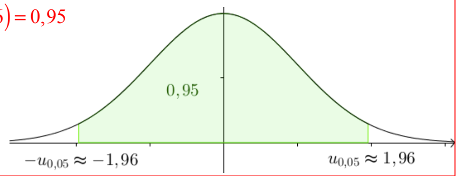
Loi normale centrée réduite $N(0;1)$ de densité

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On a : E(X) = 0 et σ(X) = 1



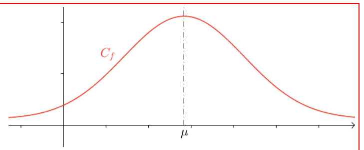
Propriété : On a : $P\left(-1{,}96\le X\le 1{,}96\right)=0{,}95$



Loi normale

X suit la **loi normale** d'espérance μ et d'écart-type σ, notée $N\left(\mu;\sigma^2\right)$,

signifie que $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.



Avec la calculatrice :

1) Pour calculer par exemple : $P\left(70\le X\le 100\right)$:

Sur TI : **2nde** et **VAR/Distrib** puis saisir **normalFRéq(70,100,80,14)** ou **normalcdf(…**
Sur Casio : **OPTN** puis **STAT**, **DIST**, **NORM**, **Ncd** puis saisir **NormCD(70,100,14,80)**

2) Pour déterminer le réel t tel que par exemple $P\left(X\le t\right)=0{,}9$:

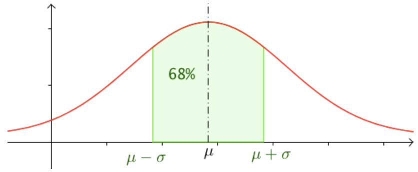
Sur TI : **2nde** et **VAR/Distrib** puis saisir **FracNormale(0.9,80,14)** ou **invNorm(…**
Sur Casio : **OPTN** puis **STAT**, **DIST**, **NORM**, **InvN** puis saisir **InvNormCD(0.9,14,80)**

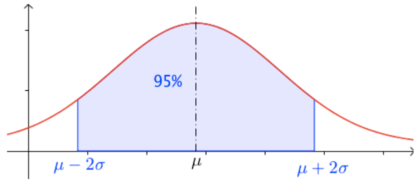
Propriétés des intervalles 1 σ, 2 σ, 3σ :

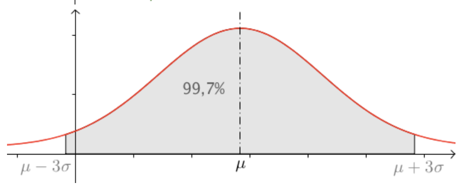
a) $P\left(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma\right)\approx 0{,}683$

b) $P\left(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma\right)\approx 0{,}954$

c) $P\left(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma\right)\approx 0{,}997$







FLUCTUATION ET ESTIMATION

Intervalle de fluctuation

On suppose que la proportion p du caractère étudié est connue.
f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n.

Intervalle de fluctuation au seuil 0,95 : $\left[p-1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Règle de décision :
Soit l'hypothèse : "La proportion de ce caractère dans la population est p."
Soit I l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Si $f\in I$, alors on accepte l'hypothèse faite sur la proportion p.
- Si $f\notin I$, alors on rejette l'hypothèse faite sur la proportion p.

Intervalle de confiance

On suppose que la proportion p du caractère étudié est inconnue.
f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n.

Intervalle de confiance de la proportion p au niveau de 0,95 : $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

MATRICES - Spé

Somme de matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 3-3 \\ 4-3 & -1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriétés :
1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

Produit de matrices

$$2\begin{pmatrix} -2 & 5{,}5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-2) & 2\times 5{,}5 \\ 2\times 2 & 2\times(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3+5\times 4 \\ -3\times 3+1\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Propriétés :
1) $(k + k')A = kA + k'A$
2) $k(A + B) = kA + kB$
3) $(kk')A = k(k'A)$
4) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 3+3\times 4 & -2\times(-3)+3\times 1 \\ 1\times 3+2\times 4 & 1\times(-3)+2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque :
$A \times B \neq B \times A$

Propriétés : 1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
2) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
3) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

La **puissance n-ième** de A est la matrice, notée A^n, égale au produit de n facteurs A.

Matrice inverse

Propriété : $A \times I_n = I_n \times A = A$

Définition : Une matrice carrée A de taille n est une **matrice inversible** s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$. La matrice $B = A^{-1}$ est la **matrice inverse** de A.

Propriété : La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Propriété : Soit A une matrice carrée inversible de taille n et M et N deux matrices carrées ou colonnes de taille n. On a : $A \times M = N$ SSI $M = A^{-1} \times N$

Ecriture matricielle d'un système linéaire

Le système $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x+3y=17 \end{cases}$ s'écrit : $A \times X = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$

Propriété : Si A est inversible, $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
Sinon le système correspondant a une infinité de solutions ou aucune solution.

GRAPHES - Spé

Définitions : - On appelle **graphe non orienté** un ensemble de points, appelés **sommets**, reliés par des lignes, appelées **arêtes**.
- L'**ordre du graphe** est le nombre de sommets.
- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.
- Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.

Définition : Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques sont adjacents.

Propriété : La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

Chaînes

Définitions : - Une **chaîne** est une succession d'arêtes mises bout à bout.
- La **longueur de la chaîne** est le nombre d'arêtes qui la compose.
- On dit qu'une chaîne est **fermée** si ses extrémités coïncident.
- Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

Définition : La **matrice d'adjacence** associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Remarque : L'arête dont les extrémités ont le même sommet 1 s'appelle une **boucle**.

Propriété : Le nombre de chaîne de longueur k reliant le sommet i au sommet j est égal au terme a_{ij} de la matrice A^k.

Définition : Un graphe G est **connexe** si chaque couple de sommets est relié par une chaîne.

Définitions : - Une **chaîne eulérienne** d'un graphe G est une chaîne qui contient une fois et une seule toutes les arêtes du graphe G.
- Un **cycle eulérien** est une chaine eulérienne fermée.

Théorème d'Euler : - G admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous les sommets de G sont de degré pair.
- G admet une chaîne eulérienne distincte d'un cycle si, et seulement si, deux sommets de G exactement sont de degré impair. Dans ce cas, la chaîne est d'extrémité ces deux sommets.

Graphes orientés et graphes pondérés

Définitions : - Un graphe est **orienté** si ses arêtes, appelées **arcs** dans ce cas, ont un sens de parcours.
- Un **chemin** est une succession d'arcs mis bout à bout.
- Un **circuit** est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr

Définitions : - Un graphe est **étiqueté** si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectés d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, …)
- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit **pondéré**. Les étiquettes sont appelées les **poids** entre les sommets.
- Le poids du chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).

Définition : La **matrice d'adjacence** associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arcs orientés reliant les sommets i et j.

Graphes probabilistes

Définition : Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égal à 1.

Définition : La matrice de transition de G est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j s'il existe et 0 dans le cas contraire.

Définition : L'**état probabiliste après n étapes** est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Propriété : On considère un graphe probabiliste de matrice de transition M et dont l'état probabiliste après n étape est P_n .
Pour tout entier naturel n, on a : $P_{n+1} = P_n \times M$ et $P_n = P_0 \times M^n$ où P_0 est l'état initial.

Définition : Un état probabiliste est dit **stable** lorsqu'il n'évolue pas lors de répétitions de l'expérience.

Propriété : Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0.
L'état stable P vérifie alors l'égalité $P = P \times M$.
Et si n tend vers l'infini, alors l'état probabiliste P_n tend vers l'état stable P.