FONCTIONS DE REFERENCE

I. Rappels de la classe de seconde

1) Sens de variation d'une fonction

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f est croissante sur I (respectivement strictement croissante sur I) signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$).

- Dire que f est décroissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I) signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$ (respectivement si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$).

- Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.

- Dire que f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I

Remarques :

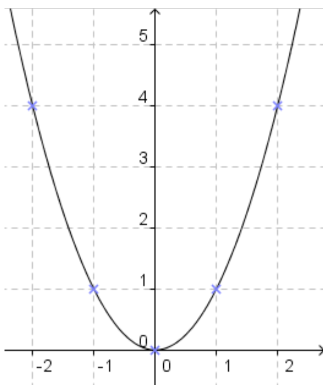
- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
- On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
- Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I.

2) Fonction carré

Définition : La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété : La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$.

Remarques :
- La courbe de la fonction carré est appelée une parabole de sommet O.
- Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

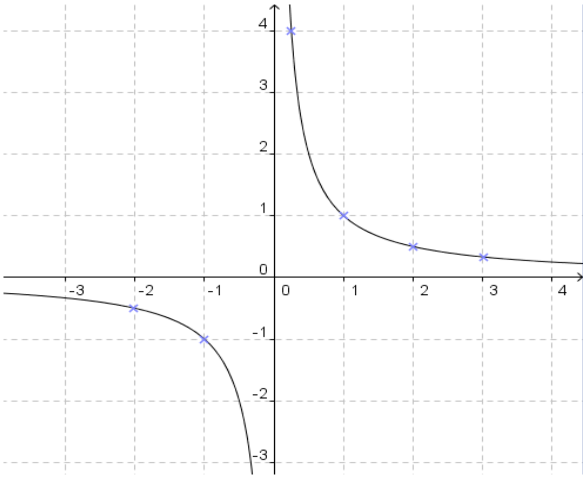


3) Fonction inverse

Définition : La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Propriété : La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Remarques :
- La courbe de la fonction inverse est appelée une hyperbole de centre O.
- Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport au centre du repère.



Méthode : Etudier le sens de variation d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/TWbjEeiZXnw

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-8x+3$ est strictement croissante sur l'intervalle $[4;+\infty[$.

Soit a et b deux nombres réels tels que : $4\leq a<b$.

$f(a)-f(b)=a^2-8a+3-b^2+8b-3$
$=a^2-b^2-8a+8b$
$=(a-b)(a+b)-8(a-b)$
$=(a-b)(a+b-8)$

Comme $a<b$, on a : $a-b<0$.

Comme $a\geq 4$ et $b>4$, on a : $a+b>8$, soit : $a+b-8>0$

On en déduit que : $f(a)-f(b)<0$ et donc : $f(a)<f(b)$.

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[4;+\infty[$.

II. Etude de la fonction racine carrée

Vidéo https://youtu.be/qJ-Iiz8TvZ4

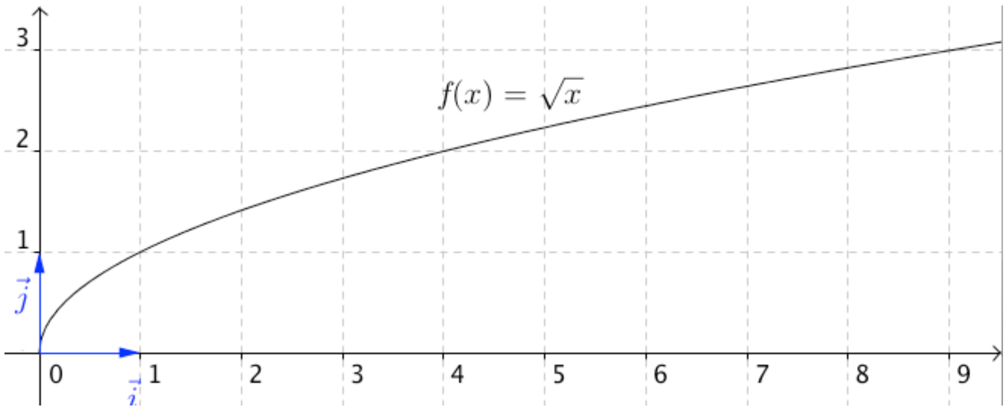
Définition : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$.

Démonstration :
Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$.

$$f(a)-f(b)=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<0$$

Donc $f(a)<f(b)$.



III. Etude de la fonction valeur absolue

Vidéo https://youtu.be/O61rmOdXg9I

1) Valeur absolue d'un nombre

Exemples :
- La valeur absolue de -5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition : La valeur absolue d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre –A si A est négatif.
La valeur absolue de A se note $|A|$.

Exemple :

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, si\ x \geq 5 \\ 5-x, si\ x \leq 5 \end{cases}$$

Propriétés : Soit x et y deux nombres réels.

1) $|x| \geq 0$ 2) $|-x| = |x|$ 3) $\sqrt{x^2} = |x|$ 4) $|x|$ = 0 équivaut à x = 0

5) $|x|$ = $|y|$ équivaut à x = y ou x = $-y$

6) $|xy|$ = $|x|$ x $|y|$ 7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

Exemples :

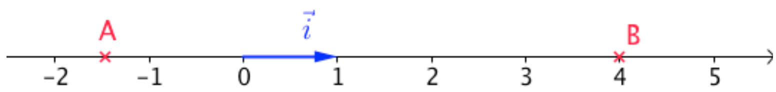
1) |-3| = 3 et |3| = 3 donc |-3| = |3|.

2) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|-5| = 5$ donc $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

2) Distance et valeur absolue

Définition : Soit a et b deux nombres réels. Sur une droite graduée munie d'un repère $(O, \vec{i})$, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives les nombres a et b est le nombre |a – b|.
Ce nombre s'appelle aussi la distance entre les réels a et b et se note d(a ; b).

Exemple :
Calculer la distance entre les nombres -1,5 et 4.
d(-1,5 ; 4) = |4 – (-1,5)| = 5,5



Propriété de l'inégalité triangulaire : Soit x et y deux nombres réels. On a :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Démonstration :
Dans un repère $(O, \vec{i})$, soit A et B deux points d'abscisses respectives x et $-y$.
On a : AB $\leq$ AO + OB, soit :
$|x-(-y)| \leq |x-0| + |0-(-y)|$, soit encore : $|x+y| \leq |x| + |y|$.

3) Fonction valeur absolue

Définition : La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$.

Propriété : La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

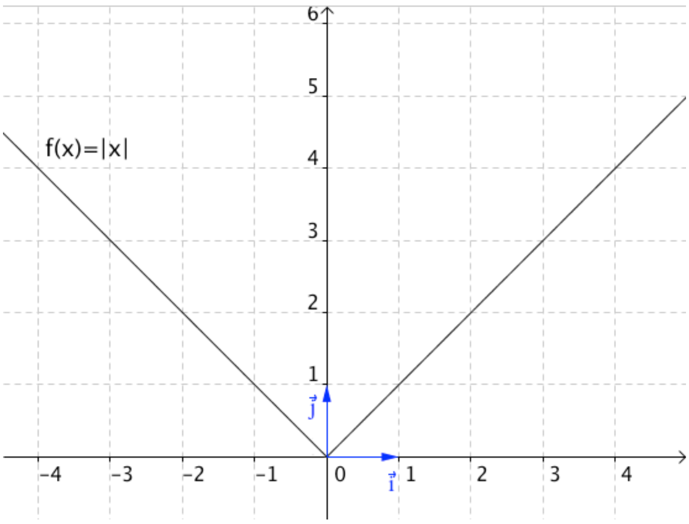
Eléments de démonstration :

$$f(x)=\begin{cases}-x & sur\ ]-\infty;0] \\ x & sur\ [0;+\infty[\end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$, la fonction f est une fonction affine.

Représentation graphique :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto |x|$	↘	0	↗



Remarque :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

IV. Positions relatives de courbes

Propriété : - Si $0 \le x \le 1$, alors $x^2 \le x \le \sqrt{x}$
- Si $x \ge 1$, alors $\sqrt{x} \le x \le x^2$.

Démonstration :

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on appelle C_f, C_g et C_h les courbes représentatives respectives des fonctions f, g et h telles que : $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x$ et $h(x)=x^2$.

- $f(0)=g(0)=h(0)=0$ et $f(1)=g(1)=h(1)=1$. Les courbes C_f, C_g et C_h sont donc sécantes au point O et au point A(1 ; 1)

- Si $0 < x < 1$: On a alors : $0 < \sqrt{x} < \sqrt{1}$,

soit : $0 < \sqrt{x} < 1$

$0 < \sqrt{x} \times \sqrt{x} < 1 \times \sqrt{x}$

$0 < \left(\sqrt{x}\right)^2 < \sqrt{x}$ car $x > 0$

$0 < x < \sqrt{x}$

soit encore : $0 < x^2 < \left(\sqrt{x}\right)^2$ car $x > 0$

donc : $0 < x^2 < x$

Sur l'intervalle $\left]0;1\right[$, la courbe C_g est strictement au dessus de la courbe C_h et strictement en dessous de la courbe C_f.

- Si $x > 1$: On a alors : $\sqrt{1} < \sqrt{x}$,

soit : $1 < \sqrt{x}$

$1 \times \sqrt{x} < \sqrt{x} \times \sqrt{x}$

$\sqrt{x} < \left(\sqrt{x}\right)^2$ car $x > 0$

$\sqrt{x} < x$

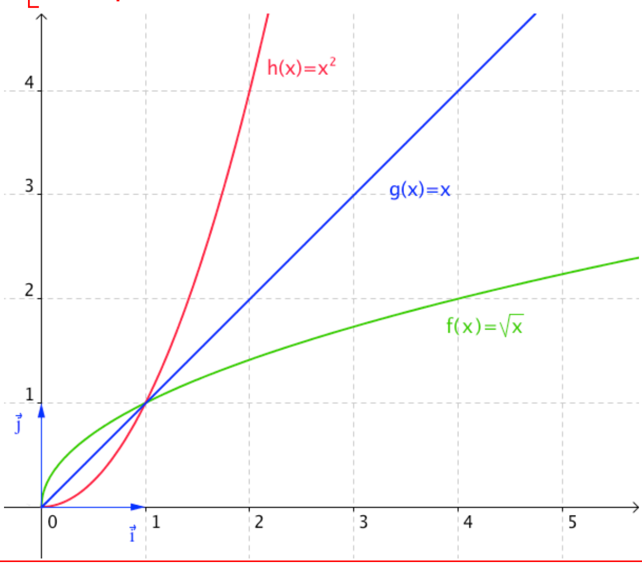
soit encore : $\left(\sqrt{x}\right)^2 < x^2$ car $x > 0$

donc : $x < x^2$

Sur l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$, la courbe C_g est strictement au dessus de la courbe C_f et strictement en dessous de la courbe C_h.

Propriété :

- Sur l'intervalle $\left[0;1\right]$, la droite d'équation $y = x$ est au dessus de la courbe de la fonction carré et en dessous de la courbe de la fonction racine carrée.
- Sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$, les position de ces trois courbes sont inversées.



Méthode : Etudier la position de deux courbes

Vidéo https://youtu.be/EyxP5HIfyF4

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+8x-11$ et $g(x)=x-1$.
Etudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

On va étudier le signe de la différence $f(x)-g(x)$:
$f(x)-g(x)=-x^2+8x-11-x+1=-x^2+7x-10$.

Le discriminant du trinôme $-x^2+7x-10$ est $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 9$
Le trinôme possède deux racines distinctes :
$x_1=\dfrac{-7-\sqrt{9}}{2\times(-1)}=5$ et $x_2=\dfrac{-7+\sqrt{9}}{2\times(-1)}=2$.

On dresse le tableau de signes du trinôme $-x^2+7x-10$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		-	O	+	O	-	

On conclut :

La courbe C_f est en dessous de la courbe C_g pour tout x de $]-\infty;2]\cup[5;+\infty[$.

La courbe C_f est en dessus de la courbe C_g pour tout x de $[2;5]$.