FONCTION DERIVÉE

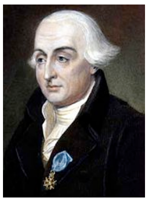
I. Dérivées des fonctions usuelles

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

Pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}=\dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=2a+h$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}2a+h=2a$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$.
On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x)=2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».
Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/9Mann4wOGJA

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=4x^3$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x)=-\frac{5}{x^6}$.

Démonstration pour la fonction inverse :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Pour $h\neq 0$ et $h\neq -a$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}=-\frac{1}{a(a+h)}$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}-\frac{1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

II. Opérations sur les fonctions dérivées

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+x^2$.

Pour $h\neq 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\frac{a+h+(a+h)^2-a-a^2}{h}$$
$$=\frac{a+h+a^2+2ah+h^2-a-a^2}{h}$$
$$=\frac{h+2ah+h^2}{h}=1+2a+h$$

donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1+2a+h=1+2a$

alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=1+2x$.

On pose pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x)=x$ et $v(x)=x^2$. On a ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x)=1$ et $v'(x)=2x$.
On constate sur cet exemple que : $f'(x)=u'(x)+v'(x)$.
Soit encore : $(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)$

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Démonstration pour la somme et l'inverse :

- On veut démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$.

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Comme u et v sont dérivables sur I, on a :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)$

donc : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=u'(a)+v'(a)$.

- $$\frac{\left(\frac{1}{u}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{u}\right)(a)}{h}=\frac{\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}}{h}$$
$$=\frac{u(a)-u(a+h)}{hu(a)u(a+h)}=-\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\frac{1}{u(a)u(a+h)}$$

donc : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{u}\right)(a+h)-\left(\dfrac{1}{u}\right)(a)}{h}=-u'(a)\times\dfrac{1}{u(a)u(a)}=-\dfrac{u'(a)}{\left(u(a)\right)^2}$.

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Vidéo https://youtu.be/ehHoLK98Ht0
Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk
Vidéo https://youtu.be/OMsZNNIldrw
Vidéo https://youtu.be/jOuC7aq3YkM
Vidéo https://youtu.be/-MfEczGz_6Y

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x)=5x^3$ 2) $f_2(x)=3x^2+4\sqrt{x}$ 3) $f_3(x)=\dfrac{1}{2x^2+5x}$

4) $f_4(x)=\left(3x^2+4x\right)\left(5x-1\right)$ 5) $f_5(x)=\dfrac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$.

1) $f_1(x)=5u(x)$ avec $u(x)=x^3 \to u'(x)=3x^2$

Donc : $f_1'(x)=5u'(x)=5\times 3x^2=15x^2$.

2) $f_2(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=3x^2 \to u'(x)=6x$

$v(x)=4\sqrt{x}\to v'(x)=4\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Donc : $f_2'(x)=u'(x)+v'(x)=6x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

3) $f_3(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=2x^2+5x \to u'(x)=4x+5$

Donc : $f_3'(x)=-\dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}=-\dfrac{4x+5}{\left(2x^2+5x\right)^2}$.

4) $f_4(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=3x^2+4x \to u'(x)=6x+4$

$v(x)=5x-1\to v'(x)=5$

Donc :

$f_4'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x+4)(5x-1) + (3x^2+4x) \times 5$

$= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x$

$= 45x^2 + 34x - 4$

5) $f_5(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$

$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$

Donc :

$$f_5'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x-5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}$$

Un logiciel de calcul formel permet de vérifier les résultats :

$\frac{d}{dx}\left((3 \cdot x^2 + 4 \cdot x) \cdot (5 \cdot x - 1)\right)$	$45 \cdot x^2 + 34 \cdot x - 4$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{6 \cdot x - 5}{x^3 - 2 \cdot x^2 - 1}\right)$	$\frac{-(12 \cdot x^3 - 27 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 6)}{(x^3 - 2 \cdot x^2 - 1)^2}$

III. Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

- Admis -

Méthode : Dresser le tableau de variations d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/23_Ba3N0fu4

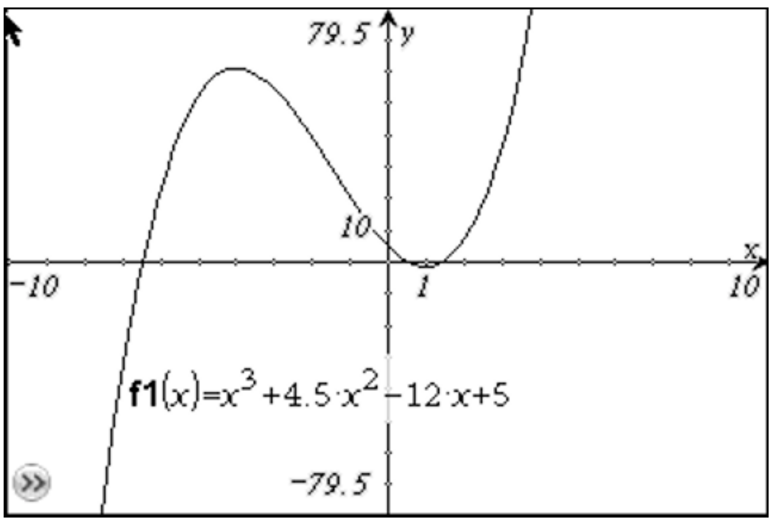
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2-12x+5$.

1) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction f.

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x)=3x^2+9x-12$.
Commençons par résoudre l'équation $f'(x)=0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2+9x-12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$
L'équation possède deux solutions : $x_1=\frac{-9-\sqrt{225}}{2\times 3}=-4$ et $x_2=\frac{-9+\sqrt{225}}{2\times 3}=1$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	



IV. Extremum d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel *c* de I alors f admet un extremum en x = *c*.

- Admis -

Méthode : Rechercher un extremum

Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnlMlk

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-3x+4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x réel, on a : $f'(x)=10x-3$

Et : $f'(x)=0$ pour $x=\frac{3}{10}$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		↘	$\frac{71}{20}$	↗	

En effet : $f\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{71}{20}$

La fonction f admet donc un minimum égal à $\frac{71}{20}$ en $x=\frac{3}{10}$.