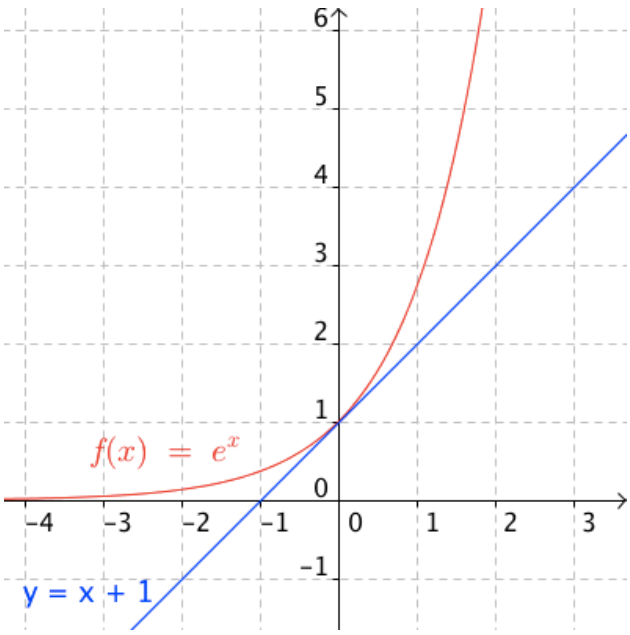
FONCTIONS EXPONENTIELLES (Partie 2)

I. Fonction exponentielle de base e

1) Définition

Propriété : Parmi toutes les fonctions $x \mapsto q^x$, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point (0 ; 1) a pour coefficient directeur 1.

- Admis -



Définition : Cette fonction est la fonction exponentielle de base e, notée **exp**, telle que pour tout réel x, on a $\exp : x \mapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarques : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

e^1

2.718281828

Il est également possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :

Remarque : On verra que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.

Comme π, le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.
Ses premières décimales sont :
$e \approx$ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 47093699959574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…
Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.
Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

Rappelons que par exemple 5! se lit "factorielle 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5.
Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.
Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

2) Propriétés

Propriétés : Pour tout réel x et y, on a :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^x > 0$

c) $e^{x+y} = e^x e^y$

d) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

e) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

f) $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$ avec n un entier relatif.

Remarque : On retrouve les propriétés des puissances.

Méthode : Simplifier les écritures

Vidéo https://youtu.be/qDFjeFyA_OY

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\dfrac{e^7\times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\quad B=\left(e^5\right)^{-6}\times e^{-3}$ $\quad C=\dfrac{1}{\left(e^{-3}\right)^2}+\dfrac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2\times e^{-6}}$

$$\begin{aligned}A&=\frac{e^7\times e^{-4}}{e^{-5}}\\&=\frac{e^{7-4}}{e^{-5}}\\&=\frac{e^3}{e^{-5}}\\&=e^{3-(-5)}\\&=e^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\left(e^5\right)^{-6}\times e^{-3}\\&=e^{5\times(-6)}\times e^{-3}\\&=e^{-30}\times e^{-3}\\&=e^{-30-3}\\&=e^{-33}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2}+\frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2\times e^{-6}}\\&=\frac{1}{e^{-3\times 2}}+\frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}}\\&=\frac{1}{e^{-6}}+\frac{e^{-4}}{e^{-4}}\\&=e^6+1\end{aligned}$$

3) Dérivabilité

Propriété : Le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est égal à 1.

Démonstration : Par définition, la tangente à la courbe représentative en 0 a pour coefficient directeur 1.

Propriété : La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(\exp x\right)'=e^x$

- Admis -

Méthode : Dériver une fonction

Vidéo https://youtu.be/XcMePHk6Ilk

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x)=4x-3e^x$ b) $g(x)=\left(x-1\right)e^x$ c) $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$

a) $f'(x)=4-3e^x$

b) $g'(x)=1\times e^x+\left(x-1\right)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

c) $h'(x)=\dfrac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

4) Variations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Comme $(\exp x)'=\exp x>0$, la fonction exponentielle est strictement croissante.

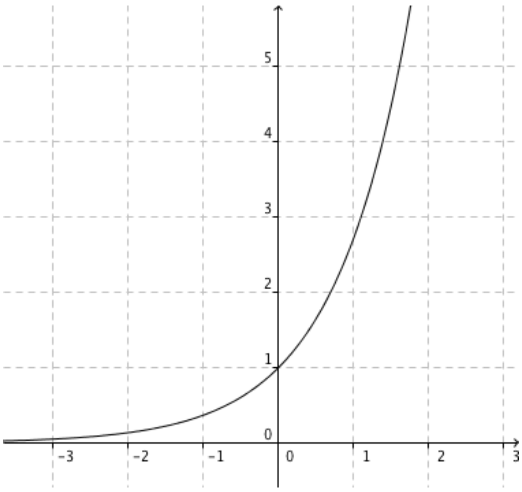
5) Limites en l'infini

Propriété : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

6) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$	+	
$\exp x$	0 ↗	$+\infty$



Méthode : Etudier une fonction

Vidéo https://youtu.be/_MA1aW8ldjo

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

a) $f'(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

b) Comme $e^x>0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

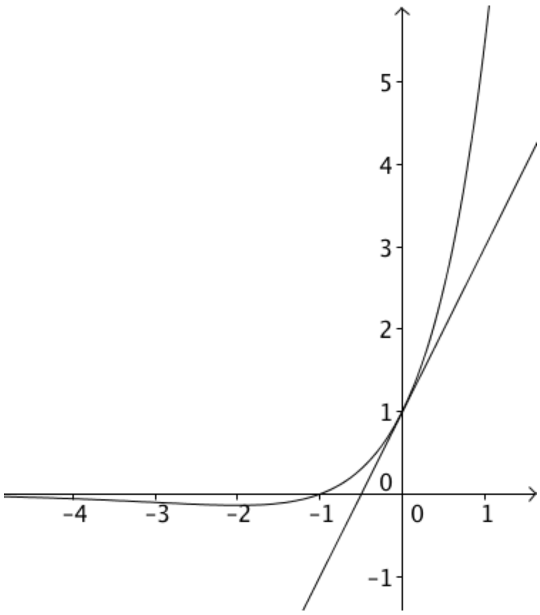
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	$-e^{-2}$	↗	

c) $f(0)=1$ et $f'(0)=2$

Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$, soit :

$y=2x+1$

d)



7) Résolution d'équations et d'inéquations

Propriétés : Pour tout réel a et b, on a :

a) $e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a=b$

b) $e^a < e^b \quad \Leftrightarrow \quad a<b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo https://youtu.be/dA73-HT-I_Y

Vidéo https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3}-e^{-2x}=0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1}\geq 1$.

a) $e^{x^2-3}-e^{-2x}=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3}=e^{-2x}$

$\Leftrightarrow x^2-3=-2x$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$

$\Leftrightarrow x=-3 \quad ou \quad x=1$

Les solutions sont -3 et 1.

b) $e^{4x-1} \geq 1$
$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$
$\Leftrightarrow 4x-1 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.

II. Fonctions de la forme e^u

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto e^u$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

- Admis -

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

Soit $f(x)=e^{4x+3}$ alors $f'(x)=4e^{4x+3}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.

Démonstration :
On a $(e^u)'=u'e^u$
Comme $e^u > 0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe.

Exemple :

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$ donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$.

Méthode : Etudier une fonction

Vidéo https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.
d) Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.

e) Démontrer que $f''(x)=\left(\frac{x}{4}-1\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

a) $f'(x)=e^{-\frac{x}{2}}+x\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}=\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

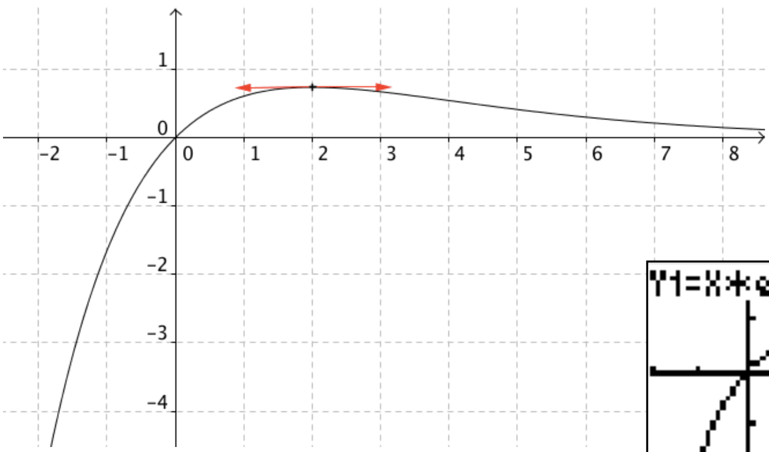
b) Comme $e^{-\frac{x}{2}}>0$, $f'(x)$ est du signe de $1-\frac{x}{2}$.

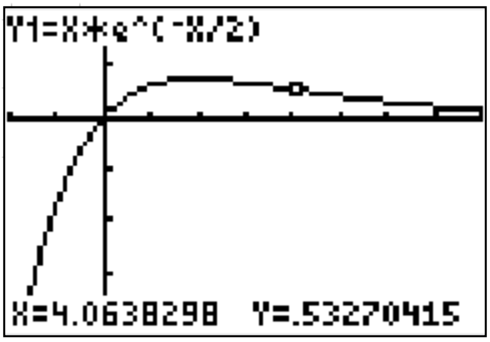
f est donc croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘	

$f(2)=2e^{-\frac{2}{2}}=2e^{-1}=2\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$

c)





d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

e) $f''(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

$=-e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

$=\left(\frac{x}{4}-1\right)e^{-\frac{x}{2}}$

f) Comme $e^{-\frac{x}{2}}>0$, $f''(x)$ est du signe de $\frac{x}{4}-1$.

Donc $f''(x)\geq 0$ pour $\frac{x}{4}-1\geq 0$ soit $x\geq 4$.

$f''(x)\leq 0$ pour $\frac{x}{4}-1\leq 0$ soit $x\leq 4$.

Ainsi f' est croissante sur $\left[4;+\infty\right[$ et donc f est convexe sur cet intervalle.

f' est décroissante sur $\left]-\infty;4\right]$ et donc f est concave sur cet intervalle.

On en déduit que la courbe représentative de f possède un point d'inflexion d'abscisse 4.