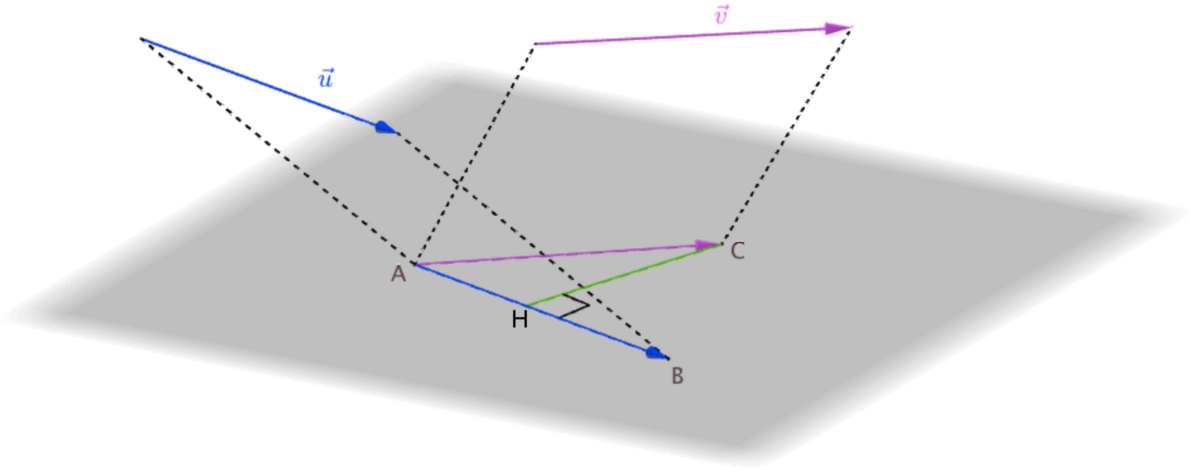
PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

I. Produit scalaire de deux vecteurs

1) Définition

Soit u et v deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $u = AB$ et $v = AC$.
Il existe un plan *P* contenant les points A, B et C.

Définition :
On appelle produit scalaire de l'espace de u et v le produit $u.v$ égal au produit scalaire $AB.AC$ dans le plan *P*.



On a ainsi :
- $u.v = 0$ si u ou v est un vecteur nul,
- $u.v = \|u\| \times \|v\| \times \cos(u; v)$

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/vp3ICG3rRQk

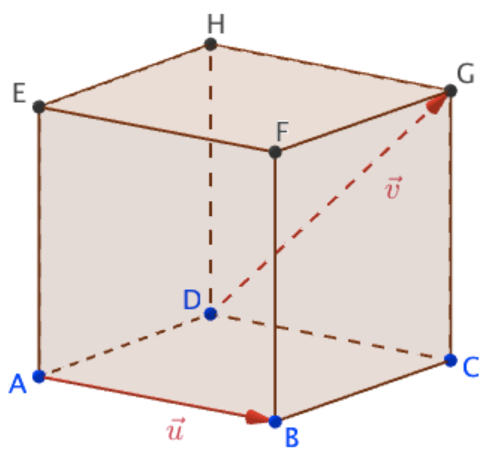
ABCDEFGH est un cube d'arête a.

$u.v = AB.DG$

$= AB.AF$

$= AB \times AB$

$= a^2$



2) Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés : Soit u , v et w trois vecteurs de l'espace.
- $u.u = \|u\|^2$
- $u.v = v.u$
- $u.\left(v+w\right) = u.v + u.w$
- $\left(ku\right).v = u.\left(kv\right) = k\left(u.v\right)$, $k \in \mathbb{R}$.
- $u.v = 0 \Leftrightarrow u$ et v sont orthogonaux.

Démonstration :
Il existe un plan *P* tel que les vecteurs u et v admettent des représentants dans *P*.
Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

3) Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Soit $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, i, j, k\right)$. Alors $u.v = xx' + yy' + zz'$.
Et en particulier : $\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démonstration :
$u.v = \left(xi + yj + zk\right).\left(x'i + y'j + z'k\right)$

$= xx'i.i + xy'i.j + xz'i.k + yx'j.i + yy'j.j + yz'j.k + zx'k.i + zy'k.j + zz'k.k$

$= xx' + yy' + zz'$

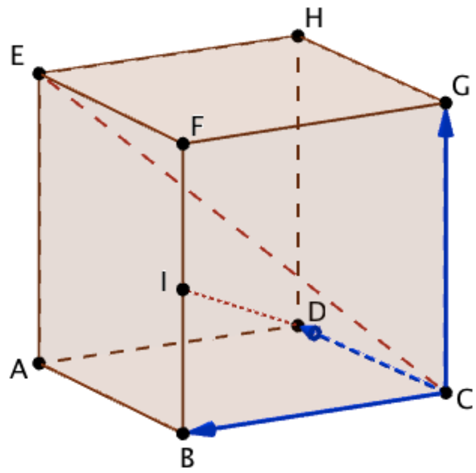
En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple $\left(i; j\right)$:

$i.i = \|i\|^2 = 1$, $j.j = \|j\|^2 = 1$ et $i.j = j.i = 0$.

On a en particulier : $\|u\|^2 = u.u = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$.

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/N1IA15sKH-E

On considère le repère de l'espace $\left(C; CB, CD, CG\right)$.



Alors : $CE\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $DI\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0,5-0\end{pmatrix}$ soit $DI\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}$.

Alors $CE.DI = 1\times1+1\times(-1)+1\times0,5 = 0,5$.

Les vecteurs CE et DI ne sont pas orthogonaux.

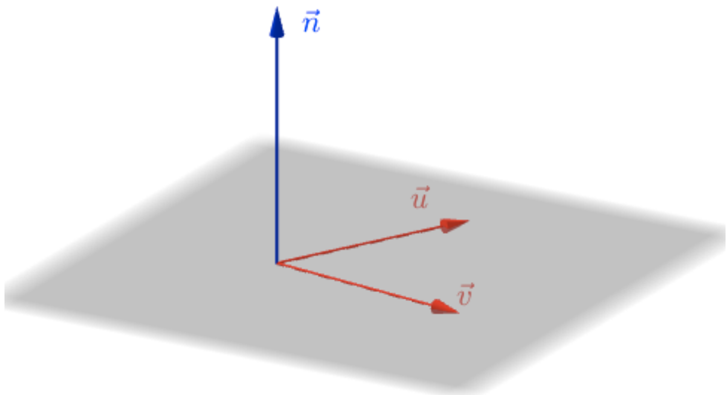
II. Vecteur normal à un plan

1) Définition et propriétés

Définition : Un vecteur non nul n de l'espace est normal à un plan *P* lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans *P*.

Théorème : Un vecteur non nul n de l'espace est normal à un plan *P* s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de *P*.

Démonstration :
Elle est incluse dans la démonstration du corollaire qui suit.



Au XIXe siècle, le vecteur normal n, appelé produit vectoriel, est noté $u \wedge v$.
Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

Corollaire : Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration (exigible BAC) :

- Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan *P* alors elle est en particulier orthogonale à deux droites sécantes de *P*.

- Démontrons la réciproque :

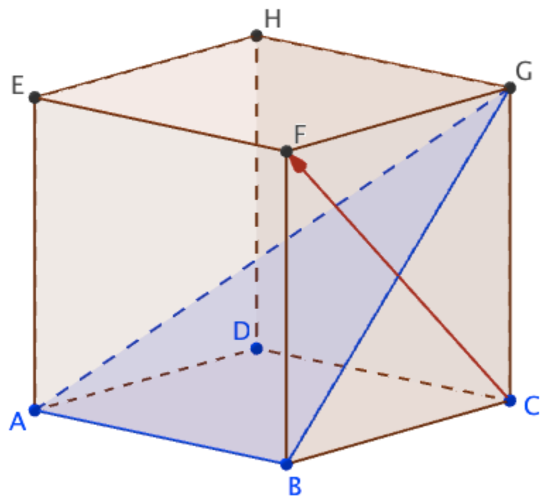
Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) de *P* sécantes et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.
Soit une droite <u>quelconque</u> (Δ) de *P* de vecteur directeur $\vec{w}$.
Démontrons que (Δ) est orthogonale à (d).

$\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de *P* (car non colinéaires).
Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Donc $\vec{w}.\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$, car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.
Et donc (d) est orthogonale à (Δ).

<u>Méthode :</u> Déterminer si un vecteur est normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4

ABCDEFGH est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).



On considère le repère $\left(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$.

Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a ainsi :

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc :
$$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG} = 0\times 0 - 1\times 1 + 1\times 1 = 0$$
$$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0\times(-1) - 1\times 0 + 1\times 0 = 0$$

Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).

<u>Méthode :</u> Déterminer un vecteur normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/IDBEI6thBPU

Dans un repère orthonormé, soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal au plan (ABC). Il est tel que :

$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -2a+b+3c=0 \\ a-2b=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\times 2b+b+3c=0 \\ a=2b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b+3c=0 \\ a=2b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=b \\ a=2b \end{cases}$

Prenons par exemple, $b=1$ alors $c=1$ et $a=2$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ABC).

2) Equation cartésienne d'un plan

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

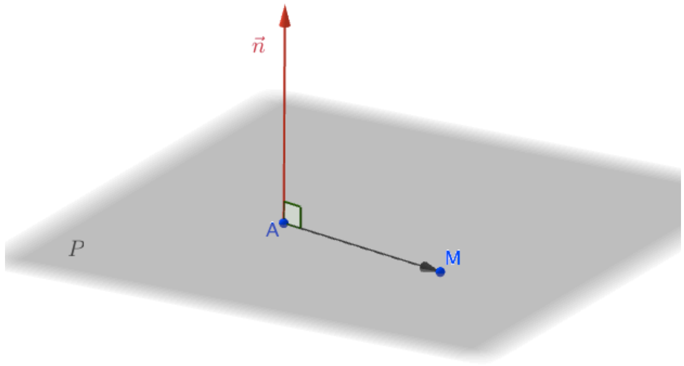
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$, est un plan.

Démonstration (exigible BAC) :

- Soit un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$ de *P*.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux



$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$ avec $d=-ax_A-by_A-cz_A$.

- Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).

On note *E* l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$

Alors le point $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifie l'équation $ax+by+cz+d=0$.
Et donc $A \in$*E*.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on a :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x+\frac{d}{a}\right)+b(y-0)+c(z-0)=ax+by+cz+d=0$.

E est donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Donc l'ensemble *E* est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

<u>Exemple :</u>

Le plan d'équation cartésienne $x-y+5z+1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$.

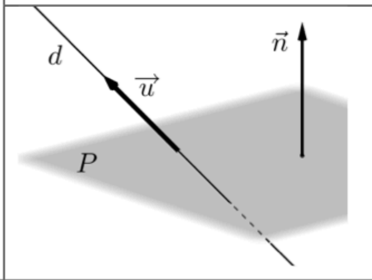
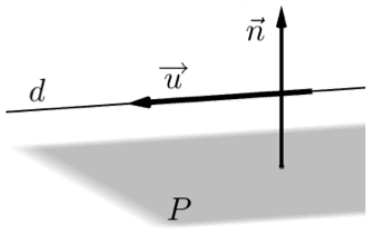
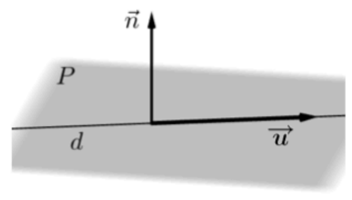
<u>Méthode :</u> Déterminer une équation cartésienne de plan

Vidéo https://youtu.be/s4xql6IPQBY

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan *P* passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de P est de la forme $3x-3y+z+d=0$.
Le point A appartient à P donc ses coordonnées vérifient l'équation :
$3\times(-1)-3\times2+1+d=0$ donc $d=8$.
Une équation cartésienne de P est donc $3x-3y+z+8=0$.

3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Positions relatives - Droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ - Plan P de vecteur normal $\vec{n}$	d et P sécants	d et P parallèles	
		d et P strictement parallèles	d incluse dans P
			
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u}.\vec{n}\neq0$	$\vec{u}.\vec{n}=0$	

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Vidéo https://youtu.be/BYBMauyizhE

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x-y+3z-2=0$.

Soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
2) Déterminer leur point d'intersection.

1) Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

(AB) et P sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-2\times2+3\times3=5\neq0$, on conclut que (AB) et le plan P ne sont pas parallèles et donc sécants.

2) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \end{cases}$$ avec t réel.

Le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ intersection de (AB) et de *P* vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

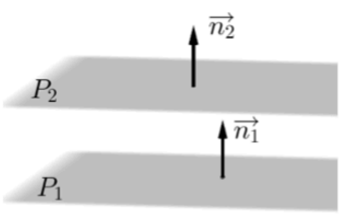
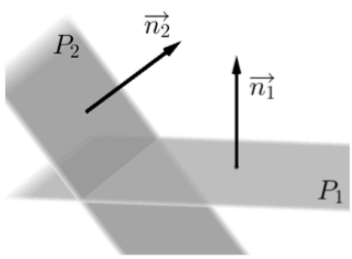
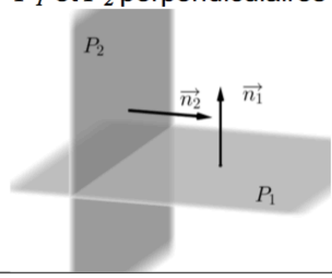
On a donc $2(1-2t) - 2 + 3(-3+3t) - 2 = 0$

$5t - 11 = 0$ soit $t = \dfrac{11}{5}$.

D'où $$\begin{cases} x = 1 - 2 \times \dfrac{11}{5} = -\dfrac{17}{5} \\ y = 2 \\ z = -3 + 3 \times \dfrac{11}{5} = \dfrac{18}{5} \end{cases}$$

Ainsi la droite (AB) et le plan *P* sont sécants en $M\left(-\dfrac{17}{5}; 2; \dfrac{18}{5}\right)$.

4) Positions relatives de deux plans

Positions relatives - Plan P_1 de vecteur normal $\vec{n_1}$ - Plan P_2 de vecteur normal $\vec{n_2}$	P_1 et P_2 parallèles	P_1 et P_2 sécants	
			P_1 et P_2 perpendiculaires 
Vecteurs	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ orthogonaux $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$

Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans

Vidéo https://youtu.be/4dkZ0OQQwaQ

Dans un repère orthonormé, les plans *P* et *P* ' ont pour équations respectives $-x + 2y + z - 5 = 0$ et $2x - y + 3z - 1 = 0$.

1) Démontrer que les plans *P* et *P'* sont sécants.

2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection *d*.

1) *P* et *P'* sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de *P'* est $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc leurs vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de *d*, intersection de *P* et de *P'*, vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases}-x+2y+z-5=0\\2x-y+3z-1=0\end{cases}$$

On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x=t$. On a alors :

$$\begin{cases}x=t\\-t+2y+z-5=0\\2t-y+3z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y+3z=1-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y+3(-2y+t+5)=1-2t\end{cases}$$

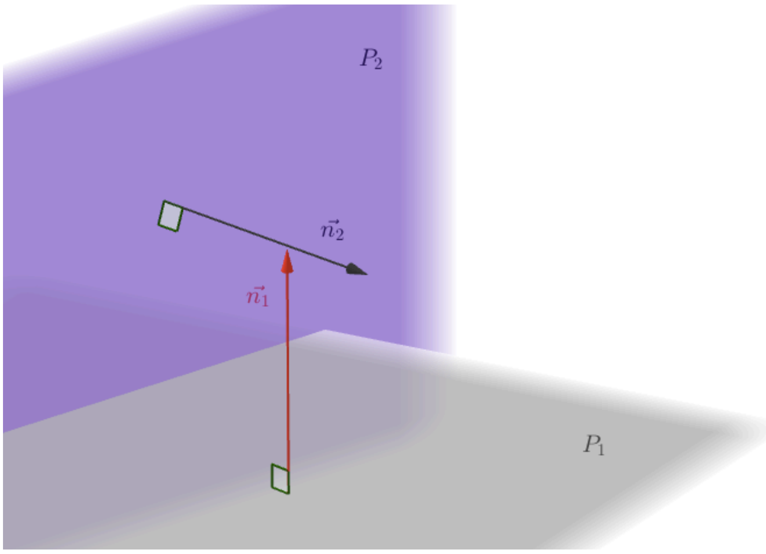
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-y-6y+3t+15=1-2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\z=-2y+t+5\\-7y=-14-5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=-2\left(2+\frac{5}{7}t\right)+t+5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2+\frac{5}{7}t\\z=1-\frac{3}{7}t\end{cases}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de *d*, avec $t\in\mathbb{R}$.

<u>Propriété :</u> Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

- Admis -



Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Vidéo https://youtu.be/okvo1SUtHUc

Dans un repère orthonormé, les plans *P* et *P'* ont pour équations respectives $2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$.
Démontrer que les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires.

Les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de *P'* est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\vec{n}'=2\times 2+4\times(-5)+4\times 4=0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires.