VECTEURS DE L'ESPACE

I. Caractérisation vectorielle d'un plan

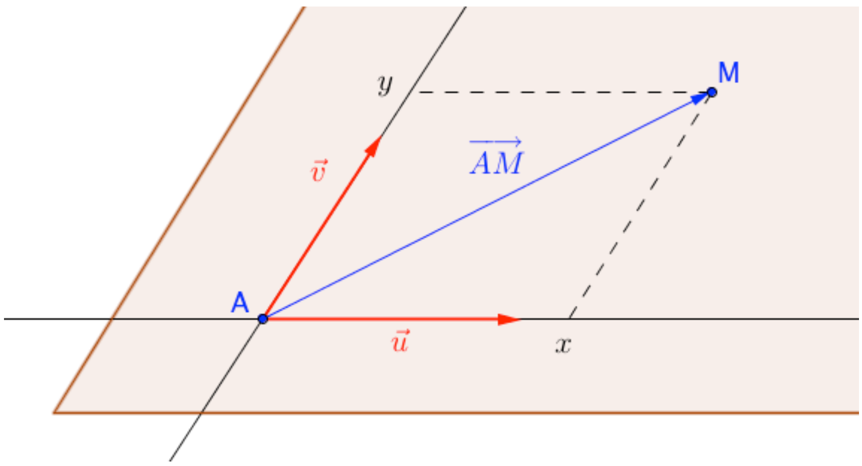
1) Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque :
Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : Relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, … restent valides.

2) Plan de l'espace

Propriété : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarque :
Dans ces conditions, le triplet $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère du plan.

Démonstration :
- Soit deux points B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère du plan (ABC). Dans ce repère, tout point M de coordonnées $(x;y)$ est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Soit N le point du plan (ABC) de coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v})$. Alors $\overrightarrow{AN}=x\vec{u}+y\vec{v}$ et donc $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$. M et N sont confondus donc M appartient à (ABC).

Remarque :
Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

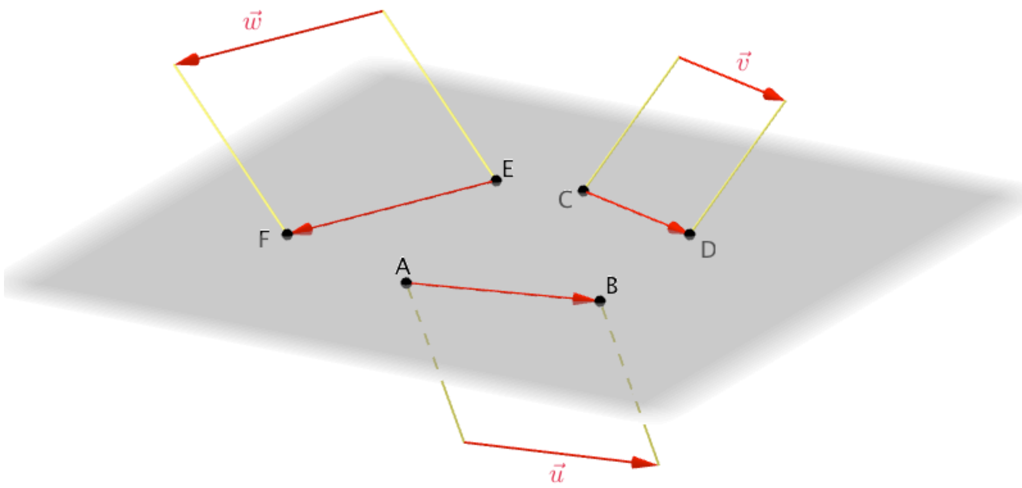
Démonstration :
Soit deux plan *P* et *P'* de repères respectifs $(A;\vec{u},\vec{v})$ et $(B;\vec{u},\vec{v})$.
- Si *P* et *P'* sont confondus, la démonstration est triviale.
- Dans la suite *P* et *P'* ne sont pas confondus.

Supposons que *P* et *P'* possède un point M en commun.
Alors dans *P*, on a : $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ où $(x;y)$ sont les coordonnées de M dans *P*.
Et dans *P'*, on a : $\overrightarrow{BM}=x'\vec{u}+y'\vec{v}$ où $(x';y')$ sont les coordonnées de M dans *P'*.
Donc $\overrightarrow{AB}=(x-x')\vec{u}+(y-y')\vec{v}$ donc B appartient à *P*.
Donc le repère $(B;\vec{u},\vec{v})$ est un repère de *P* et donc *P* et *P'* sont confondus ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
P et *P'* n'ont aucun point en commun et sont donc parallèles.

II. Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

1) Vecteurs coplanaires

Définition : Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



<u>Propriété :</u> Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

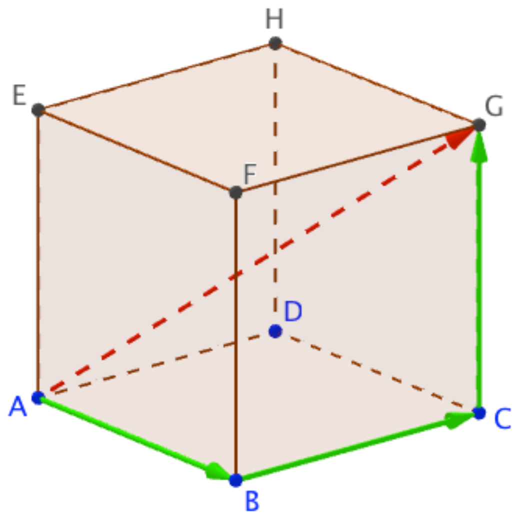
<u>Démonstration :</u>
- <u>Existence :</u> Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$.
Soit *P* le plan de repère $(A;\vec{i};\vec{j})$.

Si B appartient à *P* alors $\overrightarrow{AB}$ se décompose suivant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Supposons que B n'appartient pas à *P*.
Soit *d* la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{k}$.
Comme $\vec{k}$ n'est pas colinéaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, la droite *d* coupe le plan *P* en un point C.
On peut écrire $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$.
$\overrightarrow{AC}$ appartient au plan *P* donc il existe un couple $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{AC}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
$\overrightarrow{BC}$ est colinéaire avec $\vec{k}$ donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{BC}=z\vec{k}$.
Il existe donc un triplet $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

- <u>Unicité :</u> On suppose que l'on ait les deux écritures distinctes :
$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$
Alors $(x-x')\vec{i}+(y-y')\vec{j}+(z-z')\vec{k}=\vec{0}$.
Supposons que l'une au moins des trois différence n'est pas nulle, par exemple $z-z'\neq 0$.
Donc $\vec{k}=\frac{x'-x}{z-z'}\vec{i}+\frac{y'-y}{z-z'}\vec{j}$ et dans ce cas, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ seraient coplanaires. Ce qui est exclu.
Les trois différences $x-x'$, $y-y'$ et $z-z'$ sont nulles.

<u>Exemple :</u>

ABCDEFGH est un cube.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont non coplanaires.
Le vecteurs $\overrightarrow{AG}$ se décompose en :
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$.



2) Repère de l'espace

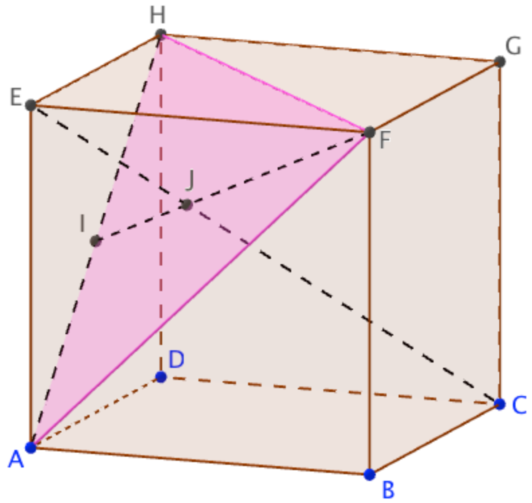
Définition : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace.
On appelle repère de l'espace le quadruplet $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Remarques :
- O est appelé l'origine du repère.
- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M.
- De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.

Méthode : Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/oY0BgzNDsQU

ABCDEFGH est un cube.
Soit I le milieu de [AH] et J le point de [FI] tel que $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.
Démontrer que les points E, J et C sont alignés.



Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires donc il est possible de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction de ces trois vecteurs.

$$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)$$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$

$= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

et

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires et donc les points E, J et C sont alignés.

III. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit une droite *d* passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Remarque :
Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite *d*.

Démonstration :

$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel *t* tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Méthode : Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

Vidéo https://youtu.be/smCUbzJs9xo

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit les points $A\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

- On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) :

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\-3-3\\2-(-1)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-6\\3\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases}x=2-t\\y=3-6t\\z=-1+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

- Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Alors $z=0$ car M appartient au plan de repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Donc $-1+3t=0$ soit $t=\frac{1}{3}$.

Et donc $\begin{cases}x=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\\y=3-6\times\frac{1}{3}=1\\z=0\end{cases}$

Le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{5}{3};1;0\right)$.