L’ESCALIER CONVERGENT

*Commentaire : Découvrir la méthode de la représentation en escalier d’une suite pour conjecturer sa convergence.*

**Partie 1**

On considère la fonction *f* définie sur $\left[0 ; +\infty \right[$ par $f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^{-x}+2$.

1) Effectuer une étude complète la fonction *f* sur $\left[0 ; +\infty \right[$ : variations, limites aux bornes, tangente(s) horizontale(s), asymptote(s), … On présentera les résultats dans un tableau de variations.

2) Représenter dans un repère la fonction *f* sur l’intervalle [0 ; 4]. On prendra 5 cm pour 1 unité sur les deux axes.

**Partie 2**

On considère la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par $u\_{0}=0,5$ et pour tout entier *n*, $u\_{n+1}=\left(u\_{n}-2\right)e^{-u\_{n}}+2$. On a ainsi pour tout entier *n*, $u\_{n+1}=f\left(u\_{n}\right)$.

1) Pour cette question, on complètera dans le repère de la **partie 1** et on laissera **tous** les traits de construction :

* Placer $u\_{0}$ sur l’axe des abscisses.
* En utilisant la courbe représentative de la fonction *f,* placer $u\_{1}=f\left(u\_{0}\right)$ sur l’axe des ordonnées.
* Placer alors $u\_{1}$ sur l’axe des abscisses. On s’aidera de la droite d’équation $y=x$.
* En utilisant la courbe représentative de la fonction *f,* placer $u\_{2}=f\left(u\_{1}\right)$ sur l’axe des ordonnées.
* Placer alors $u\_{2}$ sur l’axe des abscisses. On s’aidera de la droite d’équation$ y=x$.
* Poursuivre de la même manière pour placer $u\_{3}$ et $u\_{4}$ sur l’axe des abscisses.

2) Quelle conjecture permet d’établir la construction précédente ?

**Partie 3**

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier *n*, on a $0\leq u\_{n}\leq 2$.

2) Démontrer que la suite $\left(u\_{n}\right)$ est croissante.

3) En déduire la preuve du résultat conjecturé dans la **partie 2**.

4) Écrire un algorithme qui donne le plus petit entier *N* tel que $1,99999<u\_{N}$. Quel est cet entier ?

*On recopiera l’algorithme.*

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)