DÉRIVATION

I. Rappels

Vidéos
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoY7qihLa2dHc9-rBgVrgWJ

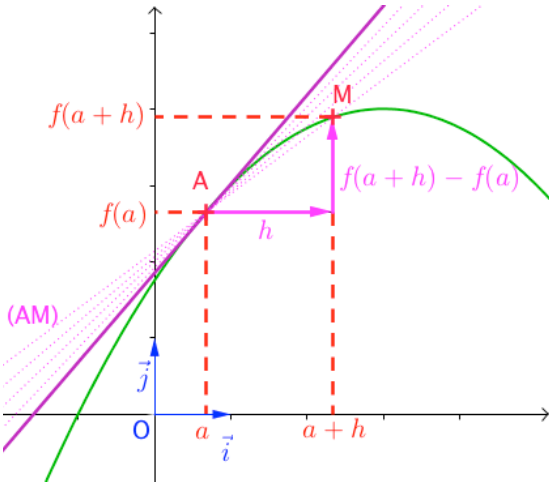
1) Fonction dérivable

Définition : On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
L est appelé le nombre dérivé de f en a.

2) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
L est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition : La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :
$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Exemple :
On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x-1$.

On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(2+h\right)^2+3\left(2+h\right)-1-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+7h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(h+7\right)=7$$

Le coefficient directeur de la tangente est égal à 7.
Donc son équation est de la forme : $y=7\left(x-2\right)+f(2)$, soit :

$y=7\left(x-2\right)+9$

$y=7x-5$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y=7x-5$.

3) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\left[0;+\infty\right[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left]0;+\infty\right[$

Exemples :
a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^6$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=6x^5$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x^4}$ alors f est dérivable sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x)=-\frac{4}{x^5}$.

4) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

<u>Exemples :</u>

a) $f(x)=\left(2x^2-5x\right)(3x-2)$

On pose $f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=2x^2-5x \to u'(x)=4x-5$

$v(x)=3x-2 \to v'(x)=3$

Donc :

$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=(4x-5)(3x-2)+\left(2x^2-5x\right)\times 3$

$=12x^2-8x-15x+10+6x^2-15x$

$=18x^2-38x+10$

b) $g(x)=\dfrac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

On pose $g(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=6x-5 \to u'(x)=6$

$v(x)=x^3-2x^2-1 \to v'(x)=3x^2-4x$

Donc :

$$g(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$=\frac{6\left(x^3-2x^2-1\right)-(6x-5)\left(3x^2-4x\right)}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{6x^3-12x^2-6-18x^3+24x^2+15x^2-20x}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{-12x^3+27x^2-20x-6}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2}$$

Un logiciel de calcul formel permet de vérifier les résultats :

$\frac{d}{dx}\left(\left(2\cdot x^2-5\cdot x\right)\cdot\left(3\cdot x-2\right)\right)$	$18\cdot x^2-38\cdot x+10$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{6\cdot x-5}{x^3-2\cdot x^2-1}\right)$	$\frac{-\left(12\cdot x^3-27\cdot x^2+20\cdot x+6\right)}{\left(x^3-2\cdot x^2-1\right)^2}$

5) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

- Admis -

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.
Résolvons l'équation $f'(x) \leq 0$
$2x - 4 \leq 0$
$2x \leq 4$
$x \leq 2$
La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right]$.

De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

II. Dérivées de fonctions composées

Vidéo https://youtu.be/kE32Ek8BXvs

1) Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété : u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :
$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Démonstration :
Soit $a \in I$ et un réel h tel que $a+h \in I$.
On calcule le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{h}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}\right)\left(\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}\right)}{h\left(\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}\right)}$$
$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}}$$

Or, la fonction u est dérivable sur I, donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$.

Et donc, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = u'(a) \times \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$.

Exemple :
$f(x) = \sqrt{3x^2+4x-1}$
On pose $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2+4x-1 \rightarrow u'(x) = 6x+4$
Donc :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$
$$= \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x-1}}$$
$$= \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$$

2) Dérivée de la fonction $x \mapsto \left(u(x)\right)^n$

Propriété : n est un entier relatif non nul. u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I dans le cas où n est négatif.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \left(u(x)\right)^n$ est dérivable sur I et on a :
$f'(x) = nu'(x)\left(u(x)\right)^{n-1}$.

Démonstration par récurrence :
- Initialisation :

$f'(x) = u'(x) = 1 \times u'(x) \times \left(u(x)\right)^{1-1}$
La propriété est donc vraie pour n = 1.
- Hérédité :
  - Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier *k* tel que la propriété soit vraie :
$(u^k)' = k u' u^{k-1}$.
- <u>Démontrons que :</u> La propriété est vraie au rang *k*+1 : $(u^{k+1})' = (k+1)u'u^k$.

$$\begin{aligned}(u^{k+1})' &= (u^k u)' \\ &= (u^k)'u + u^k u' \\ &= ku'u^{k-1}u + u^k u' \\ &= ku'u^k + u^k u' \\ &= (k+1)u'u^k\end{aligned}$$

- <u>Conclusion :</u>

La propriété est vraie pour *n* = 1 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

<u>Exemple :</u>
$f(x) = \left(2x^2 + 3x - 3\right)^4$

On pose $f(x) = \left(u(x)\right)^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

Donc :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4u'(x)\left(u(x)\right)^3 \\ &= 4\left(4x+3\right)\left(2x^2 + 3x - 3\right)^3\end{aligned}$$

3) <u>Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$</u>

<u>Propriété :</u> a et b sont deux nombres réels. f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction g définie sur I par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur tout intervalle J tel que pour tout $x \in J$, $ax + b \in I$ et on a : $g'(x) = af'(ax+b)$.

<u>Démonstration :</u>
Soit $t \in J$ et un réel h tel que $t + h \in J$.
On calcule le taux d'accroissement de g entre t et t+h :

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{f\left(a(t+h)+b\right) - f\left(at+b\right)}{h}$$

$$= \frac{f\left(at + ah + b\right) - f\left(at+b\right)}{h}$$

On pose $T = at + b$ et $H = ah$.

Donc $\dfrac{g(t+h) - g(t)}{h} = a \times \dfrac{f\left(T+H\right) - f\left(T\right)}{H}$.

Lorsque $h \to 0$, on a $ah \to 0$ donc $H \to 0$.

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lim\limits_{H\to 0} a\times\dfrac{f(T+H)-f(T)}{H}=a\times f'(T)=af'(at+b)$.

Exemple : $f(x)=\dfrac{1}{5x-4}$

Alors $f'(x)=5\dfrac{-1}{(5x-4)^2}=\dfrac{-5}{(5x-4)^2}$

En effet : $(5x-4)'=5$ et $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{-1}{x^2}$

4) Formules de dérivation sur les fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x)>0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n\in\mathbb{Z}^*$	Si $n<0$, $u(x)\neq 0$	$nu'u^{n-1}$
$f(ax+b)$	f dérivable	$af'(ax+b)$

Méthode : Etude d'une fonction composée

Vidéos dans la Playlist :
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoImIZsgQvpuNIXIUQ5D5vS

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{3x+1}}$.
On note C sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe C.
3) Etudier la dérivabilité de f.
4) Etudier les variations de f.
5) Tracer les asymptotes à C puis la courbe C.
6) Vérifier à l'aide de la calculatrice graphique.

1) La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ donc la fonction f est définie pour $\dfrac{2x}{3x+1}\geq 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$		-		-	0	+	
$3x+1$		-	0	+		+	
$\frac{2x}{3x+1}$		+	‖	-	0	+	

Donc la fonction f est définie sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup \left[0;+\infty\right[$.

2) - <u>Recherche des limites à l'infini :</u>
La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.
Levons l'indétermination :

$\frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3+\frac{1}{x}}$.

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right) = 3$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3}$.

De plus $\lim_{X\to\frac{2}{3}}\sqrt{X} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On en déduit, comme limite de fonction composée, que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On démontre de même que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ainsi la droite d'équation $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ est asymptote horizontale à la courbe C en $+\infty$ et en $-\infty$.

- <u>Recherche de la limite en $-\frac{1}{3}$:</u>

$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}(3x+1) = 0$ et $\lim_{x\to-\frac{1}{3}} 2x = -\frac{2}{3}$ donc $\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{3}\\ x<-\frac{1}{3}}}\frac{2x}{3x+1} = +\infty$.

En effet, pour $x < -\frac{1}{3}$, $3x+1 < 0$.

De plus $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$

Donc, comme limite de fonction composée, on a $\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{3}\\ x<-\frac{1}{3}}} f(x) = +\infty$.

Ainsi la droite d'équation $x=-\frac{1}{3}$ est asymptote verticale à la courbe C.

3) $x \mapsto \frac{2x}{3x+1}$ est strictement positive et dérivable sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]0;+\infty\right[$.

Comme dérivée de fonction composée, f est dérivable sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]0;+\infty\right[$.

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sqrt{\frac{2h}{3h+1}}-0}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2h}{3h+1}}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sqrt{\frac{1}{h^2}\times\frac{2h}{3h+1}}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sqrt{\frac{2}{3h^2+h}}$$

$$= +\infty$$

On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

4) Pour tout réel x de $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]0;+\infty\right[$, on pose $u(x)=\frac{2x}{3x+1}$.

$$u'(x)=\frac{2(3x+1)-3\times 2x}{(3x+1)^2}$$

$$=\frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(3x+1)^2}$$

Donc :

$$f'(x)=\frac{2}{(3x+1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}$$

Et donc $f'(x)>0$.

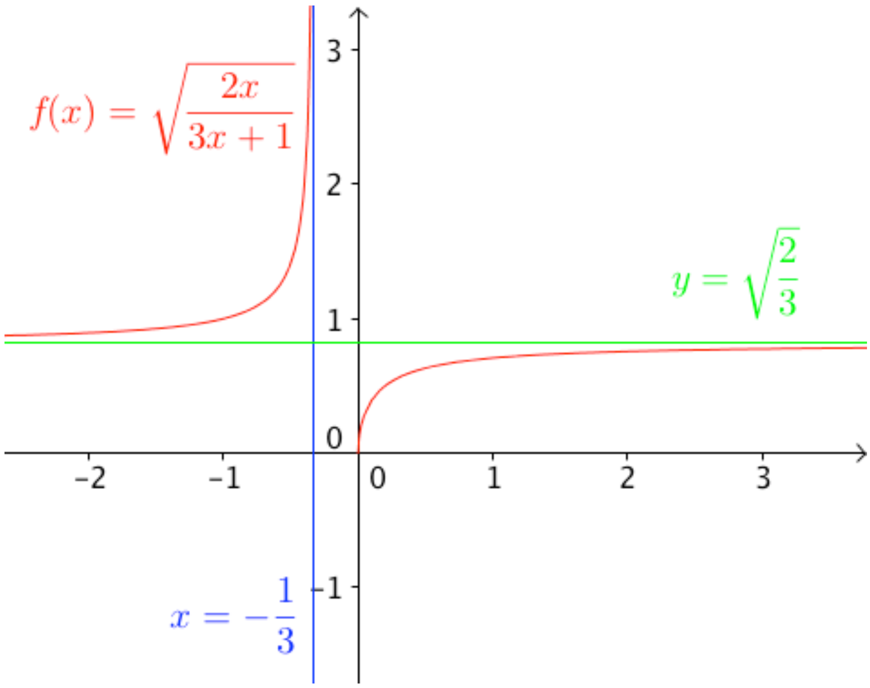
Par conséquent la fonction f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	//////////////////////////	‖	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	↗	$+\infty$ ‖	//////////////////////////	0	↗	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

$f(0)=0$

5)



6)