ACHILLE ET LE PARADOXE DE L'INFINI

Commentaire :
Cette activité exploite la notion de somme des termes d'une suite géométrique ainsi que la convergence d'une suite.

A priori la somme d'un nombre infini de longueurs est une longueur infinie. Au Vème siècle avant J.C., le grec Zénon d'Elée (-490 ; -425) nous exprime qu'il peut en être autrement :

Achille, célèbre pour sa rapidité, court à vitesse constante sur une longueur de 1 km. Précisons que le kilomètre n'existait pas encore à cette époque.
À la 1ère étape, Achille parcourt la moitié de la longueur de la course. À la 2e étape, il parcourt la moitié de la longueur restante et ainsi de suite en poursuivant le processus de division.
L'objectif de cette activité est de démontrer que plus on ajoute d'étapes, plus on se rapproche de l'arrivée sans la dépasser.

1) Quelle est la distance parcourue durant 2e étape de la course ? Durant la 3e étape ? Durant la 4e étape ?

2) On note u_n la distance parcourue durant la n-ième étape de la course.
Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison q et le premier terme u_1.

3) Exprimer u_n en fonction de n.

4) a) Démontrer que pour tout n, on a : $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - 0{,}5^n$.
b) Calculer la limite de cette somme et donner une interprétation du résultat.

5) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimum d'étapes pour approcher l'arrivée à moins de 1 mm.