

DROITES

I. Equation de droites

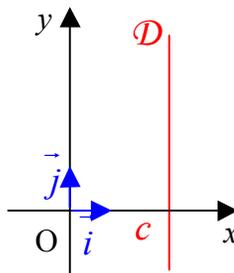
1. Caractérisation analytique d'une droite

Propriété :

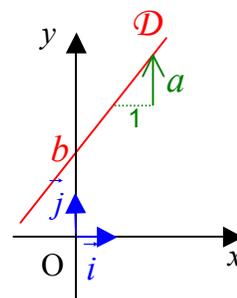
Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan.

Soit \mathcal{D} une droite du plan.

- Si \mathcal{D} est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de \mathcal{D} est de la forme $x = c$,
où c est un nombre réel.



- Si \mathcal{D} n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de \mathcal{D} est de la forme $y = ax + b$,
où a et b sont deux nombres réels.



Vocabulaire :

a est appelé le coefficient directeur de la droite \mathcal{D} .

b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite \mathcal{D} .

Démonstration :

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts d'une droite \mathcal{D} .

Dire qu'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à la droite \mathcal{D} revient à

dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

D'après la condition de colinéarité : $(x - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$.

- Si \mathcal{D} est parallèle à l'axe des ordonnées, alors $x_A = x_B$.

La condition de colinéarité peut s'écrire : $(x - x_A)(y_B - y_A) = 0$

Ce qui équivaut à $x = x_A$ car $y_A \neq y_B$, les points A et B étant distincts.

\mathcal{D} vérifie une équation de la forme $x = c$ avec $c = x_A$.

- Si \mathcal{D} n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors $x_A \neq x_B$.

La condition de colinéarité peut s'écrire : $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$

\mathcal{D} vérifie une équation de la forme $y = ax + b$ avec $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et

$$b = y_A - \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) x_A.$$

Exercice : Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$

a) Coefficient directeur : -2
Ordonnée à l'origine : 3

b) Coefficient directeur : 0
Ordonnée à l'origine : 5

b) L'équation peut s'écrire : $y = -2x + \frac{1}{2}$

Coefficient directeur : -2

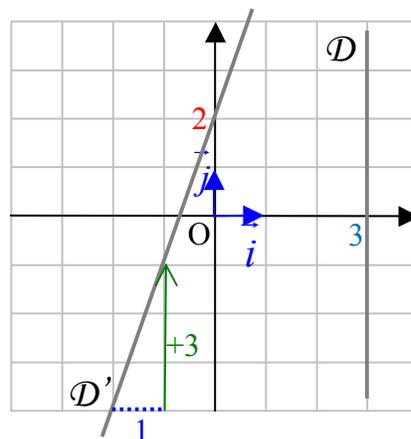
Ordonnée à l'origine : $\frac{1}{2}$

Exemples :

La droite \mathcal{D} a pour équation $x = 3$

La droite \mathcal{D}' a pour équation $y = 3x + 2$.

Son ordonnée à l'origine est 2 et son coefficient directeur est +3.



Exercices conseillés	En devoir
Ex 1, 2 (page 10) p201 n°1 à 4 p208 n°65	p207 n°62

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
p200 n°1 à 4 p211 n°101 p206 n°61	p200 n°5

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

Activité conseillée
p184 n°1 : Équations de droites

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Activité conseillée
p184 n°1 : Équations de droites

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation donnée

► Vidéo <https://youtu.be/cUdhxkaTqqk>

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan.

Dans ce repère, tracer les droites d_1 , d_2 et d_3 d'équations respectives :

$$y = 2x + 3,$$

$$y = 4,$$

$$x = 3.$$

- La droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$ a pour ordonnée à l'origine 3. Donc le point

A de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d_1 .

Soit B le point d'abscisse -2 appartenant à la droite d_1 . Les coordonnées de B vérifient l'équation de d_1 , donc :

$$y_B = 2x(-2) + 3 = -1.$$

Le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d_1 .

On peut ainsi tracer la droite d_1 passant par A et B.

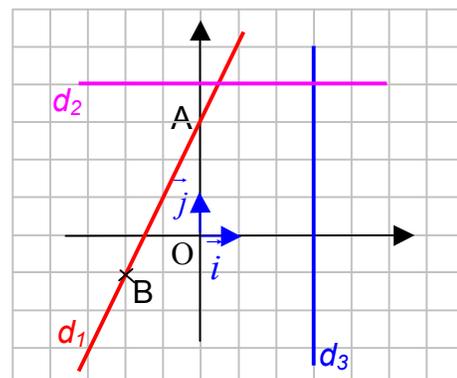
- La droite d_2 d'équation $y = 4$ est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à 4. La droite d_2 est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses coupant

l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Pour tracer la droite d_2 , on aurait également pu remarquer que son coefficient directeur est nul.

- La droite d_3 d'équation $x = 3$ est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à 3. La droite d_3 est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées coupant l'axe des abscisses au point de coordonnées

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Exercices conseillés	En devoir
p201 n°5 à 7 p202 n°8, 10* p207 n°61 p208 n°66*	Ex 3 (page 10)

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
p200 n°7 à 11 p206 n°61 p208 n°81, 82	p200 n°6

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

TP conseillé
TP TICE 1 p194 : Un réseau de droites TP Algo 1 p197 : Rechercher une équation de droite

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

TP conseillé
p194 TP2 : Un réseau de droites p194 TP1 : Rechercher une équation de droite

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

2. Conséquence :

Propriété :

Si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points distincts d'une droite \mathcal{D} tel que $x_A \neq x_B$

alors la droite \mathcal{D} a pour coefficient directeur $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Méthode : Déterminer une équation de droite dont on connaît deux points

 Vidéo <https://youtu.be/tfagLy6QRuw>

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan.

Soit $A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ deux points d'une droite d .

Déterminer une équation de la droite d .

Les points A et B sont d'abscisses différentes donc la droite d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle est donc de la forme $y = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de d est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{3 - 4} = \frac{6}{-1} = -6$

Comme $A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d , ses coordonnées vérifient l'équation de d soit :

$-1 = -6 \times 4 + b$. D'où $b = -1 + 6 \times 4 = 23$

Une équation de d est donc : $y = -6x + 23$.

Exercices conseillés	En devoir
p202 n°18, 19, 20, 22*	p202 n°17

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
p201 n°19, 21 p206 n°63	p201 n°20

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

3. Propriété réciproque :

Propriété :

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan et a, b, c trois nombres réels, a étant non nul.

L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont tels que :

$y = ax + b$ ou $x = c$, est une droite.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

 Vidéo <https://youtu.be/XA0YajthETQ>

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan.

Les points $A \begin{pmatrix} 6,4 \\ 42 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 346 \\ 2419 \end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite d d'équation

$$y = 7x - 3 ?$$

- Dire que le point $A \begin{pmatrix} 6,4 \\ 42 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d d'équation $y = 7x - 3$

revient à dire que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite d .

Ce qui n'est pas le cas, puisque $42 \neq 7 \times 6,4 - 3 = 41,8$.

Le point A n'appartient donc pas à la droite d .

- Les coordonnées de $B \begin{pmatrix} 346 \\ 2419 \end{pmatrix}$ vérifient l'équation de la droite d . En effet :
 $2419 = 7 \times 346 - 3$ donc le point B appartient à la droite d .

Exercices conseillés	En devoir
Ex 4 (page 10) p202 n°11, 12, 13, 14, 15	Ex 5 (page 10)

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
p200 n°13 à 17 p206 n°65	p200 n°12

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

II. Position relative de deux droites

Propriété :

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan.

Soit \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.

Dire que \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Démonstration :

La droite \mathcal{D} admet une équation du type $y = ax + b$.

La droite \mathcal{D}' admet une équation du type $y = a'x + b'$.

Soit A et B deux points distincts de \mathcal{D} d'abscisses respectives 0 et 1 alors

A et B ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ a+b \end{pmatrix}$.

De même, A' et B' deux points de \mathcal{D}' , ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ b' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ a'+b' \end{pmatrix}$.

Dire que les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles équivaut à dire que les vecteurs

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $1 \times a' - 1 \times a = 0$, soit $a = a'$.

Tableau récapitulatif :

Equation de \mathcal{D}	$x = c$	$y = ax + b$	$y = ax + b$	
Equation de \mathcal{D}'	$x = c'$	$x = c'$	$y = a'x + b'$	
Position de \mathcal{D} et \mathcal{D}'	$\mathcal{D} // \mathcal{D}'$	\mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes	Si $a = a'$	Si $a \neq a'$
			$\mathcal{D} // \mathcal{D}'$	\mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes
Représentation				

Vidéo <https://youtu.be/gTUPGw7Bulc>

Exemples :

Dans un repère du plan, d_1 , d_2 et d_3 admettent pour équations respectives :

$$y = 3x + 4, \quad y = 3x + 9, \quad x = 8$$

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.

Les droites d_1 et d_3 sont sécantes.

Exercices conseillés	En devoir
Ex 6 à 8 (page 10) p203 n°28, 29, 27	Ex 9 (page 10)

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
p202 n°26, 28 à 30 p204 n°54 p206 n°68, 67 p207 n°70, 71	p202 n°27 p206 n°69

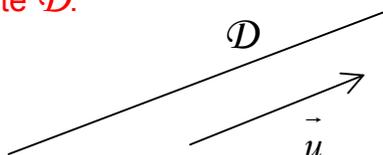
ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

III. Vecteur directeur d'une droite

Définition :

\mathcal{D} est une droite du plan.

On appelle vecteur directeur de \mathcal{D} tout vecteur non nul \vec{u} qui possède la même direction que la droite \mathcal{D} .



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

► Vidéo <https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y>

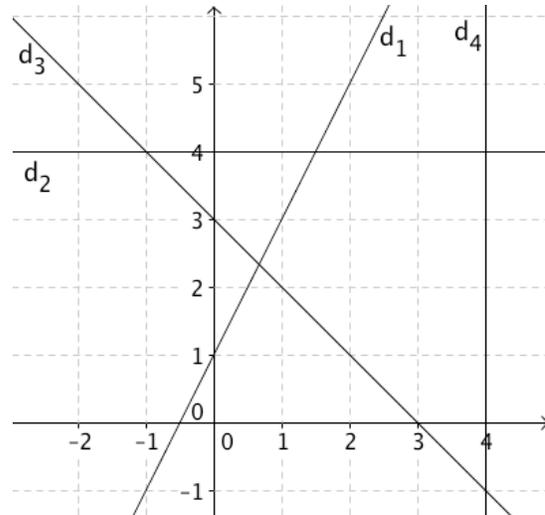
Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4 .

Pour d_1 : $\vec{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{c} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Pour d_2 : $\vec{d} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour d_3 : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour d_4 : $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$.

**Propriété :**

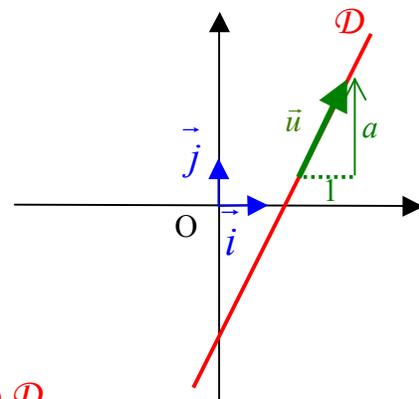
Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan.

- Si \mathcal{D} est parallèle à l'axe des ordonnées
alors \vec{j} est un vecteur directeur de \mathcal{D} .

- Si \mathcal{D} n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées,

alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

de \mathcal{D} , où $y = ax + b$ est une équation de la droite \mathcal{D} .

**Démonstration :**

La droite \mathcal{D} d'équation $y = ax + b$ passe par les points A $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} 1 \\ a+b \end{pmatrix}$.

Les points A et B étant distincts, le vecteur \overrightarrow{AB} de coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ a+b-b \end{pmatrix}$ soit

$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .

Exemple :

La droite \mathcal{D} d'équation $y = -2x + 3$ admet le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de \mathcal{D} car \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Méthode : Déterminer une équation de droite dont on connaît un point et un vecteur directeur

 Vidéo <https://youtu.be/4NXgsUSKrrk>

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère du plan.

Soit $A \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ un point d'une droite d admettant $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Déterminer une équation de la droite d .

On considère un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la droite d .

Les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. En effet, \overrightarrow{AM} est également un vecteur directeur de d .

D'après le critère de colinéarité : $-(x+3) - 2(y-4) = 0$

Soit : $-x - 3 - 2y + 8 = 0$

Soit encore : $-2y = x - 5$

Une équation de d est : $y = -0,5x + 2,5$.

Exercices conseillés En devoir

p202 n°23 p203 n°24, 26, 30, 32, 25 p206 n°52 à 55	p203 n°31
-------------------------------------------------------------	-----------

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés En devoir

p201 n°22 à 24 p204 n°53 p207 n°72, 73	p201 n°25
----------------------------------------------	-----------

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Exercice 1

Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes :

$$d_1 : y = 2x+1 \quad d_2 : y = 5x-3 \quad d_3 : y = -2x-7 \quad d_4 : y = 7x \quad d_5 : y = -5$$

Exercice 2

Même exercice :

$$d_1 : y + 3 = 5x \quad d_2 : 3y = 9x-6 \quad d_3 : x = -2y+1 \quad d_4 : y = 7(x+5)$$

Exercice 3

Représenter dans un repère les droites suivantes :

$$d_1 : y = -3x+5 \quad d_2 : y = 4x-2 \quad d_3 : y = 5$$

Exercice 4

Soit d la droite d'équation $y = 9x-11$. Les points $A(12 ; 97)$ et $B(-6 ; 65)$ appartiennent-ils à la droite d ? Justifier.

Exercice 5

Soit d et d' les droites d'équation respective $y = -3$ et $x = 3$.

Parmi les points $A(3 ; -3)$, $B(3 ; 3)$, $C(-3 ; 3)$ et $D(-3 ; -3)$ lesquels appartiennent à la droite d ? à la droite d' ?

Exercice 6

Dans chaque cas, dire si les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

$$a) d_1 : y = 3x+5 \text{ et } d_2 : y = 3x-2 \quad b) d_1 : y = -3x+7 \text{ et } d_2 : y = 3x+8$$

$$c) d_1 : y = 4x+1 \text{ et } d_2 : y = 4x \quad d) d_1 : y = 5 \text{ et } d_2 : y = 5x$$

Exercice 7

Même exercice :

$$a) d_1 : y = 2x+3 \text{ et } d_2 : y = 3x+2 \quad b) d_1 : y = 5x+1 \text{ et } d_2 : y = 1+5x$$

$$c) d_1 : y = 5 \text{ et } d_2 : y = 7 \quad d) d_1 : x = 3 \text{ et } d_2 : x = -1$$

Exercice 8

Pour chacune des affirmations indiquer si elle est vraie ou fausse.

- 1) La droite d'équation $y = 2$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
- 2) La droite d'équation $y = x$ est parallèle à l'axe des abscisses.
- 3) Les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$ sont parallèles.
- 4) Les droites d'équation $y = 3$ et $x = 2$ sont sécantes.

Exercice 9

1) Donner l'équation de la droite d_1 passant par le point $A(0 ; 2)$ et parallèle à la droite d_2 d'équation $y = -2x+5$.

2) Donner l'équation de la droite d_3 passant par le point $A(0 ; -1)$ et parallèle à l'axe des abscisses.

3) Donner l'équation de la droite d_4 passant par le point $A(3 ; 2)$ et parallèle à l'axe des ordonnées.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales