EQUATIONS, INEQUATIONS

I. Résolution d'équations

Activité conseillée	Activité conseillée
p126 activité1 : Notion d'équation et d'inéquation	p60 activité1 : Notion d'équation et d'inéquation
ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010	*ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014*

Exercices conseillés	En devoir
-p140 n°2 à 4 -Ex 1 (page 11) p140 n°6* et 8* -PB: p144 n°60, 63, 64, 65 p145 n°69 p146 n°76*	p140 n°1, 5 p144 n°66* p145 n°74*

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
-p76 n°20 à 22 -Ex 1 (page 11) p76 n°24* p81 n°78, 79* -PB: p83 n°107, 108, 110 p84 n°113 p85 n°121	p76 n°19, 23 p83 n°111* p84 n°117*

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

1. Equation-produit

Définition : Toute équation du type $P(x) \times Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, est appelée équation-produit.

Remarque :
Nous rencontrerons plus particulièrement des équations produits de la forme : $(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriétés :
- Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un au moins des facteurs est nul.
- Le cas particulier de l'équation-produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/EFgwA5f6-40
Vidéo https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
1) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$ 2) $5x^2 - 4x = 0$

1) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :

$(3x+1)(1-6x)-(3x+7)(3x+1)=0$
$(3x+1)[(1-6x)-(3x+7)]=0$
$(3x+1)(1-6x-3x-7)=0$
$(3x+1)(-9x-6)=0$

Soit : $3x+1=0$ ou $-9x-6=0$
$3x=-1$ ou $-9x=6$
$x=-\frac{1}{3}$ ou $x=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$

Les solutions sont donc $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

2) $5x^2-4x=0$
$x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$
$5x=4$
$x=\frac{4}{5}$

Les solutions sont donc 0 et $\frac{4}{5}$.

Exercices conseillés	En devoir
-Ex 2 (page 11) p140 n°9, 11 et 12* p141 n°20 p141 n°23 -PB: p145 n°68 p138 n°3*	p140 n°10

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
-Ex 2 (page 11) p76 n°25, 28 p81 n°85, 87 p82 n°99, 100 -PB: p83 n°112 p85 n°122*	p76 n°26

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

TP conseillé
TP TICE 1 p133 : Recherche triangles rectangles ! TP TICE 3 p134 : Résoudre une équation avec un logiciel

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

TP conseillé
p71 TP3 : Recherche triangles rectangles ! p72 TP6 : Résoudre une équation avec un logiciel

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

2. Equation de la forme $x^2 = a$

Propriété :
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.
Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$

Soit $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$

$$x-\sqrt{a}=0 \quad ou \quad x+\sqrt{a}=0$$

$$x=\sqrt{a} \quad ou \quad x=-\sqrt{a}$$

Exemples :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^2 = 16$, $x^2 = -8$ et $(x+2)^2 = 9$

- L'équation $x^2 = 16$.
  16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.
- L'équation $x^2 = -8$.
  -8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $(x+2)^2 = 9$.
  On a alors $x+2 = 3$ ou $x+2 = -3$.
  L'équation admet deux solutions $x = 3-2 = 1$ et $x = -3-2 = -5$.

Exercices conseillés	En devoir
Ex 3 et 4 (page11) p140 n°13 p141 n°21*, 22*	p140 n°15

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
Ex 3 et 4 (page11) p76 n°29, 31, 30	p76 n°32

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

3. Equation-quotient

Définition : Toute équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée équation-quotient.

Propriété : Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $P(x) = 0$.

Exemple :

L'équation $\frac{x+2}{x+3} = 0$ a pour solution x = -2.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg
Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$

d) $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

a) L'équation n'est pas définie pour x = 1.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ équivaut à : $3x+5=0$.

D'où $x = -\frac{5}{3}$.

b) L'équation n'est pas définie pour x = 4.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ équivaut à : $(2x+1)(x-3)=0$.

Soit : $2x+1=0$ ou $x-3=0$

Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x=3$.

c) L'équation n'est pas définie pour x = -3.

Pour $x \neq$ -3, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ équivaut à : $x^2-9=0$, soit $x^2=9$

Soit encore : $x=3$ ou $x=-3$.

Comme $x \neq$ -3, l'équation a pour unique solution : $x=3$.

d) L'équation n'est pas définie pour x = 2 et x = 3.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x}$ équivaut à :

$$1-\frac{x+3}{x-3}-\frac{2}{2-x}=0$$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$$

$$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)}=0$$

$$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)}=0$$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$ et $(x-3)(2-x)\neq 0$

D'où $x=\frac{3}{2}$.

Exercices conseillés

Exercices conseillés	
Ex 5 et 6 (page11) p140 n°16, 17 Ex 7 et 8 (page11) p140 n°18 p141 n°19*	

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
Ex 5 et 6 (page11) p76 n°33, 34 Ex 7 et 8 (page11) p81 n°82, 83, 88	p81 n°81

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

II. Tableaux de signes

1) Exemple d'introduction

a) Compléter le tableau de valeurs suivant de l'expression $2x - 10$:

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$								

b) Compléter alors la 2[e] ligne du tableau de signes de l'expression $2x - 10$:

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x - 10$		…	0	…	

c) Pour quelle valeur x de l'expression $2x - 10$ s'annule-t-elle ?
Compléter alors la 1[ère] ligne du tableau de signes.

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

a)

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$	-30	-20	-10	-8	2	4	10	190

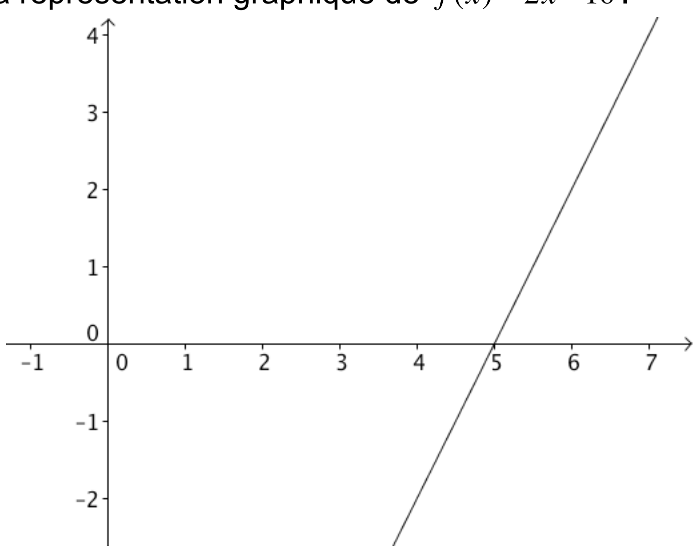
b)

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x - 10$		-	0	+	

c) $2x - 10 = 0$ soit $2x = 10$ soit encore $x = 5$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2x - 10$		-	0	+	

d) On trace la représentation graphique de $f(x) = 2x - 10$.



2) Généralisation

On considère a et b deux nombres fixés ($a \neq 0$) et x est un nombre réel.
Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

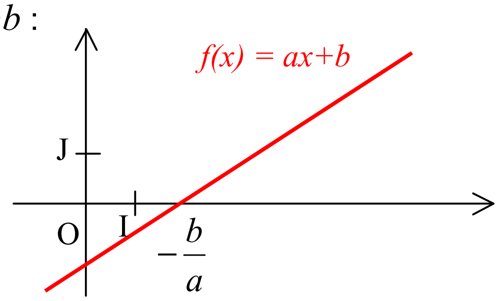
Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses :

Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.
soit : $ax + b = 0$,
soit : $ax = -b$,
soit encore $x = -\dfrac{b}{a}$.

Si a > 0 :

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

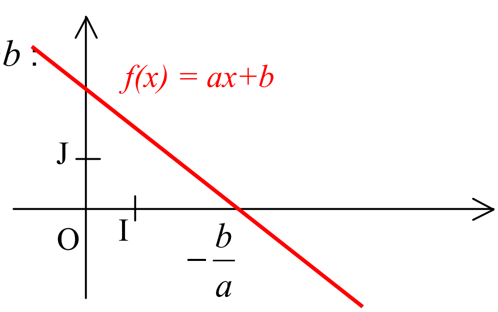
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		-	0	+	



Si a < 0 :

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		+	0	-	



Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

Vidéo https://youtu.be/50CByVTP4ig

1) Déterminer le tableau de signes de l'expression $2x + 6$, où x est un nombre réel.

Le coefficient devant « x » est positif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$+2x + 6$		$-$	0	$+$	

$2x + 6 = 0$ pour $x = -3$. ⇑

2) Déterminer le tableau de signes de l'expression $-3x + 12$, où x est un nombre réel.

Le coefficient devant « x » est négatif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x + 12$		$+$	0	$-$	

$-3x + 12 = 0$ pour $x = 4$. ⇑

Exercices conseillés	En devoir
p141 n°24, 26, 27	p141 n°28

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
p77 n°35, 36, 41, 40	p77 n°42

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

III. Résolution d'inéquations

Exercices conseillés	En devoir
-p142 n°34 à 36 p142 n°38 -PB : p145 n°73	p142 n°37

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
p77 n°46, 47 p82 n°93, 94, 95 -PB : p84 n°116	p77 n°47

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

1. En étudiant le signe d'un produit

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Vidéo https://youtu.be/qoNLr9NkvUE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3-6x)(x+2)>0$

Le signe de $(3-6x)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x + 2$.

$3 - 6x = 0$ ou $x + 2 = 0$
$6x = 3$ $x = -2$
$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.
En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3-6x)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3 - 6x$		+		+	0	-	
$x + 2$		-	0	+		+	
$(3-6x)(x+2)$		-	0	+	0	-	

On en déduit que $(3-6x)(x+2) > 0$ pour $x \in \left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2) > 0$ est $\left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

Exercices conseillés	En devoir
-Ex 9 et 10 (page11) p142 n°39, 43 p142 n°44*, 45*, 46* -PB : p146 n°75*	p141 n°25, 29

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
-Ex 9 et 10 (page11) p77 n°39 p82 n°90, 91 p82 n°102* -PB : p85 n°120*	p77 n°37, 38

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

2. En étudiant le signe d'un quotient

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Vidéo https://youtu.be/Vitm29q8AEs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour $3x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$.

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2-6x$ et $3x-2$.

$2-6x$ = 0 équivaut à $x=\frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		+	0	-		-	
$3x-2$		-		-	0	+	
$\frac{2-6x}{3x-2}$		-	0	+	||	-	

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour x = $\frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$ pour $x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$ est $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

Exercices conseillés	En devoir
Ex 11 à 14 (page11) p142 n°40, 41, 47*, 48* p141 n°31 p142 n°32 p143 n°56	p141 n°30 p144 n°62*

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
Ex 11 à 14 (page11) p77 n°43 à 45 p77 n°49 p82 n°96, 97 p78 n°59	p77 n°50

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

Exercice 1

1) $x+7=4$

2) $2x-8x-4=8x+6-7+4x$

3) $3x=9$

4) $-(x+5)=5(1-2x)$

5) $8x=4$

6) $9x-7x+5-9x=6-4x+8x$

7) $\frac{8}{7}x=14$

8) $6(3y-5)=-(-5-y)$

9) $12x=48$

10) $7x-2x+2x-9+7x=14x$

11) $\frac{x}{2}=25$

12) $-(18-x)+7(3x+5)=-(2-4x)$

Exercice 2

$a)\ (3x+6)(3x-1)-(3x+6)(2x-4)=0$

$b)\ (x-5)(5x+1)+(x-5)(5x+10)=0$

$c)\ (-x+3)(2x-1)+(-x+3)(x-7)=0$

$d)\ (4x+8)(-x+4)-(4x+8)(x+5)=0$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 49$ **b.** $x^2 = 6$

c. $x^2 = -16$ **d.** $x^2 - 53 = -4$

e. $(x + 1)^2 = 4$ **f.** $(x - 2)^2 - 14 = 2$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 121$ **b.** $x^2 = 11$

c. $x^2 = -9$ **d.** $x^2 + 5 = 30$

e. $(x + 5)^2 = 49$ **f.** $(x - 4)^2 + 1 = 2$

Exercice 5

Résoudre les équations-quotients suivantes :

a. $\frac{3x-3}{x+1}=0$ **b.** $\frac{4-x}{x-3}=0$

c. $\frac{5x-2}{x^2+1}=0$ **d.** $\frac{-7x+1}{2-4x}=0$

Exercice 6
Résoudre les équations-quotients suivantes.

a. $\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=0$ **b.** $\frac{(2-x)(x-6)}{x-8}=0$

c. $\frac{(2x-4)(x-6)}{3x+1}=0$ **d.** $\frac{(-7x+7)(4x-6)}{8-x^2}=0$

Exercice 7
Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{x+1}{x+2}-2=0$ **b.** $\frac{2x-1}{x+6}+1=0$

c. $\frac{x-1}{3x+2}=3$ **d.** $\frac{x-1}{2-2x}=-1$

Exercice 8
Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}=0$ **b.** $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1}=0$

c. $\frac{1}{2x-1}=\frac{2}{x-4}$ **d.** $\frac{4}{3x+3}=\frac{2}{2-x}$

Exercice 9
Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $(x-3)(x-1)\leq 0$ **b.** $(x-9)(x-5)<0$

c. $(2x+4)(3x-3)\geq 0$ **d.** $(15-5x)(x+1)>0$

Exercice 10
Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $(3x-4)(x+7)>0$ **b.** $(2x-8)(10x+5)<0$

c. $(2-x)(6x+3)\geq 0$ **d.** $(7-x)(6x+18)\leq 0$

Exercice 11
Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\frac{x-3}{x+1}\leq 0$ **b.** $\frac{x+4}{x-6}>0$

c. $\frac{3x-6}{x-5}\leq 0$ **d.** $\frac{2x-9}{1-x}\geq 0$

Exercice 12

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{2x+8}{x-9}>0$ **b.** $\dfrac{6x+1}{7-x}\geq 0$

c. $\dfrac{x+5}{3x-5}\leq 0$ **d.** $\dfrac{-2x-10}{4-3x}\geq 0$

Exercice 13

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{2x+8}{x-1}-1>0$ **b.** $\dfrac{x+1}{3-x}+2\geq 0$

c. $\dfrac{x+4}{x-5}\leq 2$ **d.** $\dfrac{2x-10}{x-4}\geq 3$

Exercice 14

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{x+1}{x-2}+3<0$ **b.** $\dfrac{x+2}{x-2}+1<0$

c. $\dfrac{x-3}{x-1}\leq 5$ **d.** $\dfrac{3x-3}{5-x}\leq 2$