LES FONCTIONS : GENERALITES ET VARIATIONS

I. Vocabulaire et notations

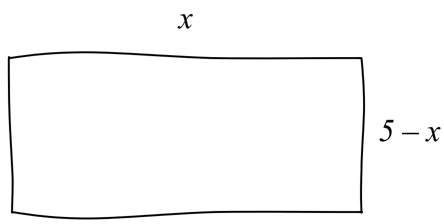
1. Exemple d'introduction :

Avec une ficelle de longueur 10 cm, on fabrique un rectangle.
On désigne par x la longueur d'un côté de ce rectangle.

a) Calculer l'aire du rectangle lorsque x = 3 cm.

Si la longueur est égale à 3 cm alors la largeur est égale à 2 cm.
Donc A = 3 x 2 = cm^2.

b) Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle.



Les dimensions du rectangle sont donc : x et $5 - x$.
En effet : $\mathcal{P} = 2x + 2(5 - x) = 10$ cm.

Ainsi l'aire du rectangle s'exprime par la formule $A = x(5 - x)$

c) Développer A.

$A = x(5 - x) = 5x - x^2$

d) On peut calculer l'aire du rectangle pour différentes valeurs de x :

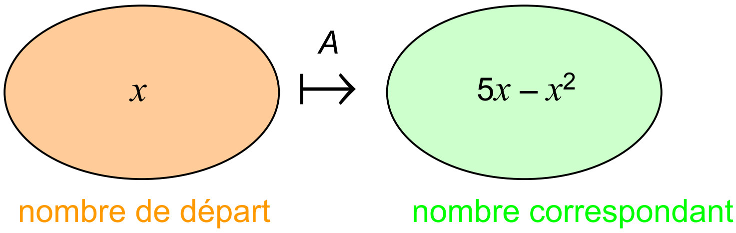
x	*1*	*1,5*	*2*	*2,5*	*3*	*3,5*	*4*	*4,5*
Aire	**4**	**5,25**	**6**	**6,25**	**6**	**5,25**	**4**	**2,25**

Ce tableau est appelé un tableau de valeurs.
Pour chaque nombre x, on a fait correspondre un nombre égal à l'aire du rectangle.
Par exemple : $1 \mapsto 4$
$2 \mapsto 6$

De façon générale, on note : $\boxed{A : x \mapsto 5x - x^2}$

$x \mapsto 5x - x^2$ se lit « à x, on associe $5x - x^2$ »

A est appelée une fonction. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.



L'expression *A* dépend de la valeur de x et varie en fonction de x.
x est appelée la variable.

On note ainsi : $\boxed{A(x) = 5x - x^2}$

$A(x)$ se lit « *A* de x ».

2. Définitions

Définitions :
Soit *D* une partie de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
Une fonction f définie sur *D* associe à tout nombre réel x de *D* un unique nombre réel, noté $f(x)$.
D est appelé l'ensemble de définition de la fonction f.

On note :

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

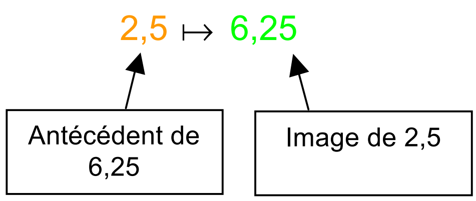
Et on lit :
« La fonction f, définie pour x appartenant à *D*, qui à un nombre x associe le nombre $f(x)$. »

3. Image, antécédent

Exemples :

Pour la fonction *A* définie plus haut, on avait :
$A(2,5) = 6,25$ $A(1) = 4$

On dit que :
- l'image de 2,5 par la fonction *A* est 6,25.
- un antécédent de 6,25 par A est 2,5.



Remarques :
- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Par exemple : les antécédents de 5,25 sont 1,5 et 3,5 (voir tableau de valeurs).

Méthode : Calculer une image ou un antécédent

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}+1$

1) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$				

2) Compléter alors :
   a) L'image de 4 par f est …
   b) Un antécédent de 5 par f est …
   c) f : … $\mapsto$ 4,2
   d) f(20,25) = …

3) Calculer f(4,41) et f(1310,44)

1)

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$	**3**	**4,2**	**5**	**5,5**

2) a) L'image de 4 par f est **3**.
   b) Un antécédent de 5 par f est **16**.
   c) f : **10,24** $\mapsto$ 4,2
   d) f(20,25) = **5,5**

3) $f(4{,}41) = \sqrt{4{,}41} + 1 =$ **3,1**

$f(1310{,}44) = \sqrt{1310{,}44} + 1 =$ **37,2**

II. Représentation graphique

1. Courbe représentative

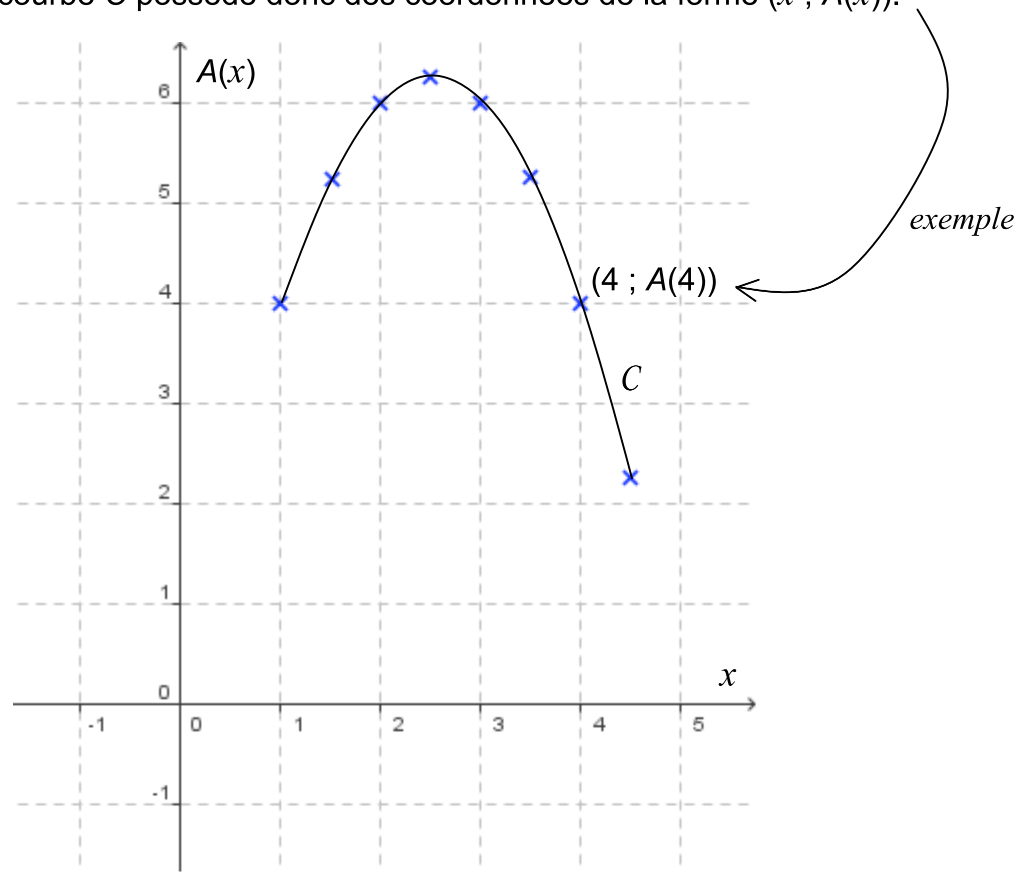
En latin, « curbus » désignait ce qui est courbé. On retrouve le mot en ancien français sous la forme de « corbe ». Le corbeau est ainsi appelé à cause de la forme de son bec.

Exemple :

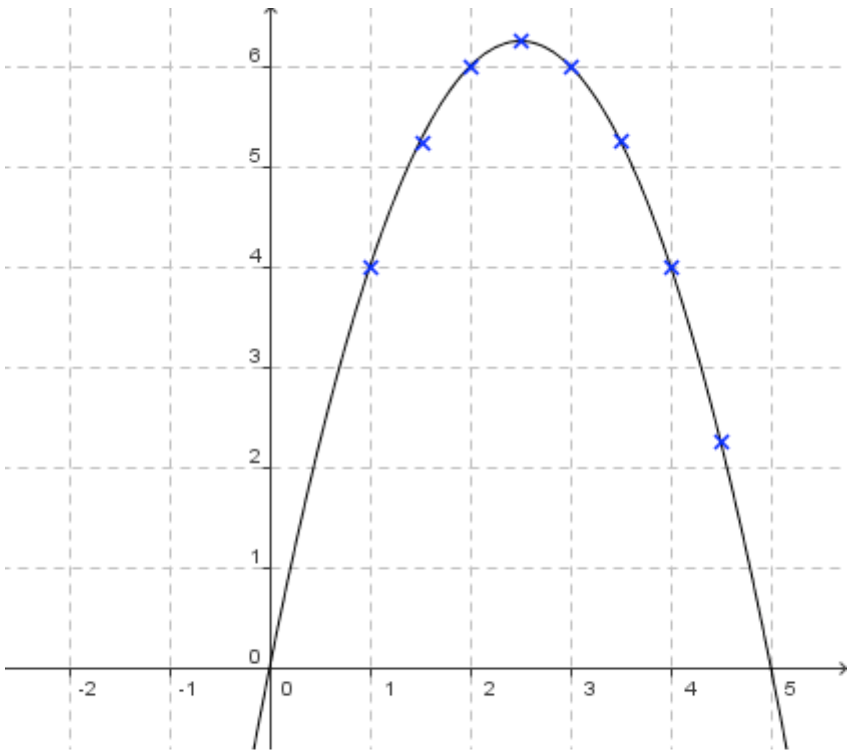
Représenter les données du tableau de valeurs du paragraphe **I.** dans un repère tel qu'on trouve en abscisse la longueur du côté du rectangle et en ordonnée son aire correspondante.

En reliant les points, on obtient une courbe *C*.

Tout point de la courbe *C* possède donc des coordonnées de la forme (x ; $A(x)$).



Ouvrir le logiciel *GeoGebra* et saisir directement l'expression de la fonction *A*.
Dans la barre de saisie, on écriera : a(*x*)=5*x*-*x*^2



La courbe représentative de la fonction *A* dépasse les limites du problème.

En effet, l'expression de la fonction A accepte par exemple des valeurs négatives de x, ce que les données du problème rejettent puisque x représente une longueur !

On peut ainsi dresser un tableau de signes de la fonction A sur un intervalle plus grand :

x	-1		0		5		6
$A(x)$		-	0	+	0	-	

2. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Exemples :

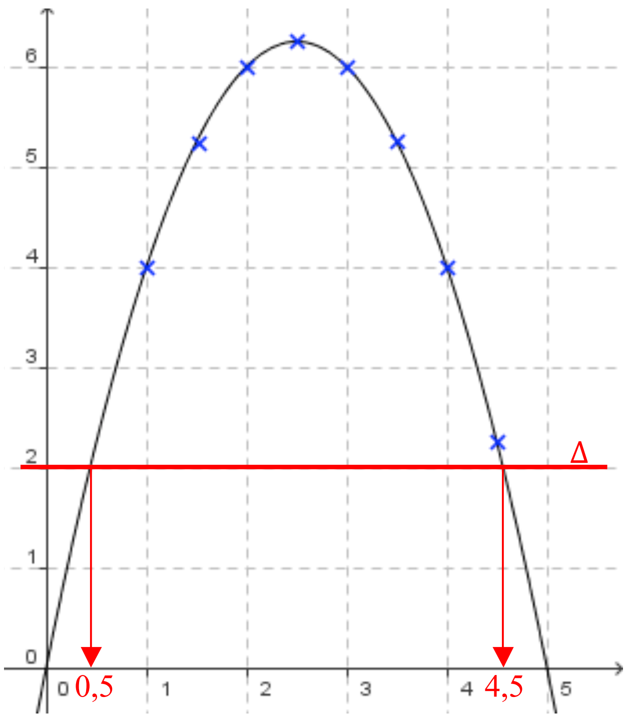
Répondre graphiquement aux questions suivantes :

a) Résoudre l'équation $5x - x^2 = 2$.
b) En déduire un ordre de grandeur des dimensions d'un rectangle dont l'aire est égale à 2 cm^2.
c) Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 2$. Donner une interprétation du résultat.

a) Il s'agit de trouver les antécédents de 2 par la fonction A.
Ce qui revient à résoudre l'équation $A(x) = 2$.

On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point (0 ; 2).
On lit graphiquement que l'équation $5x - x^2 = 2$ admet pour solutions : les nombres 0,5 et 4,5.

b) Le rectangle de dimensions 0,5 cm sur 4,5 cm possède une aire environ égale à 2 cm^2.



c) Résoudre l'inéquation $5x - x^2 > 2$ revient à déterminer les abscisses des points de C pour lesquels C est au-dessus la droite Δ.
On lit graphiquement que l'inéquation $5x - x^2 > 2$ admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle [0,5 ; 4,5].

Si une dimension du rectangle est comprise entre 0,5 et 4,5 alors son aire est supérieure à 2.

Remarques :

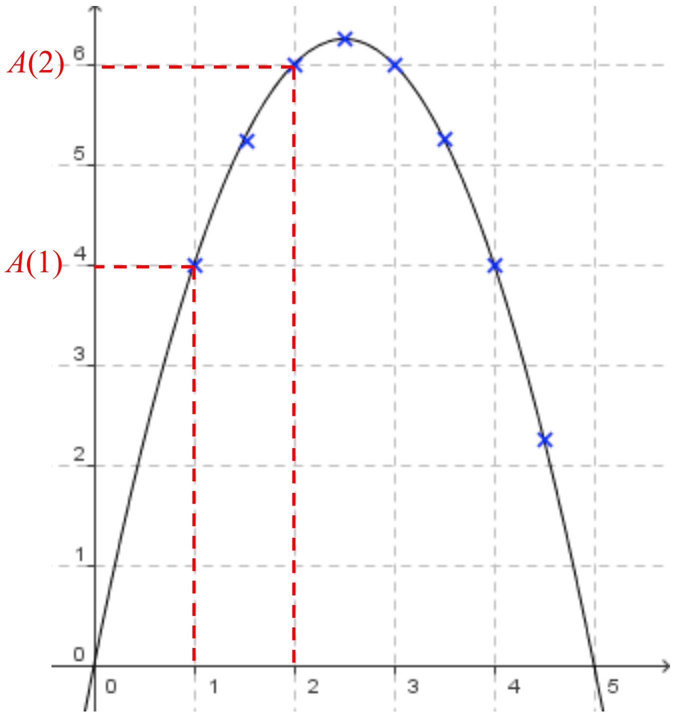
a) Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.

b) L'équation $A(x) = 7$ n'a pas de solution car dans ce cas la droite Δ ne coupe pas la courbe.

c) Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

III. Variations d'une fonction

1. Exemple



Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle [0 ; 2,5], l'aire A du rectangle est également croissante.

Par exemple : $1 < 2$ et $A(1) < A(2)$.

Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle [2,5 ; 5], l'aire A du rectangle est décroissante.

Par exemple : $3 < 4$ et $A(3) > A(4)$.

On dit que la fonction A est croissante sur l'intervalle [0 ; 2,5] et décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 5].

2. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f est croissante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I : si a < b alors $f(a) \leq f(b)$.

- Dire que f est décroissante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I : si a < b alors $f(a) \geq f(b)$.

- Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels *a* et *b* de I : $f(a) = f(b)$.

- Dire que f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Remarques :
- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
- On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
- Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I.

3. Maximum ; minimum

Exemple :
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 5], on a : $A(x) \leq 6{,}25$.
6,25 est le maximum de la fonction *A*.
L'aire du rectangle est maximum pour $x = 2{,}5$.

Définitions :
Soit f une fonction de l'intervalle I.
a et *b* deux nombres réels de I.

- Dire que f admet un maximum *M* en *a* de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leq M$.

- Dire que f admet un minimum *m* en *b* de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \geq m$.

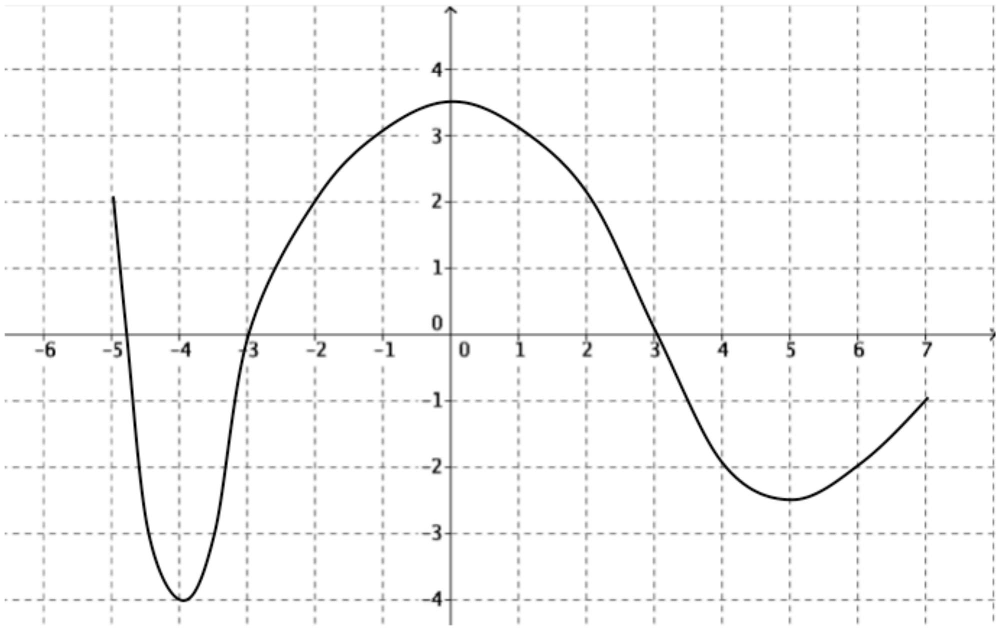
4. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

<u>Exemple :</u>
La fonction A est croissante sur l'intervalle [0 ; 2,5] et décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 5].
$A(0) = 0$, $A(2,5) = 6,25$, $A(5) = 0$.

x	0		2,5		5
$A(x)$			6,25		
	0	↗		↘	0

<u>Méthode :</u>
On considère la représentation graphique la fonction f :



1) Donner son ensemble de définition.
2) Donner les variations de la fonction.
3) Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.
4) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

1) La fonction f est définie sur [-5 ; 7].
2) La fonction f est croissante sur les intervalles [-4 ; 0] et [5 ; 7]. Elle est décroissante sur les intervalles [-5 ; -4] et [0 ; 5].
3) Le maximum de f est 3,5. Il est atteint en $x = 0$.
Le minimum de f est -4. Il est atteint en $x = -4$.
4)

x	-5		-4		0		5		7
$f(x)$	2				3,5				-1
		↘	-4	↗		↘	-2,5	↗	