

SUITES GÉOMÉTRIQUES

Partie 1 : Relation de récurrence

Exemples :

a) Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

$$u_0 = 5, u_1 = 10, u_2 = 20, u_3 = 40.$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 5$.

b) Soit la suite numérique (v_n) de premier terme 4 et de raison 0,1.

Les premiers termes successifs sont :

$$v_0 = 4$$

$$v_1 = 0,1 \times 4 = 0,4$$

$$v_2 = 0,1 \times 0,4 = 0,04$$

$$v_3 = 0,1 \times 0,04 = 0,004$$

La suite est donc définie par : $v_{n+1} = 0,1 \times v_n$ et $v_0 = 4$.

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q , strictement positif, tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 %.

Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$$

$$u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$$

$$u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

Partie 2 : Forme explicite en fonction de n

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , on a :

$$u_n = u_0 q^n$$

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

Méthode : Exprimer une suite géométrique en fonction de n

 Vidéo <https://youtu.be/WTmdtbQpa0c>

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an.
On note u_n la valeur du capital après n années.

- Calculer u_2 et u_3 .
- Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Donner la variation de la suite (u_n) .
- Exprimer u_n en fonction de n .

Correction

a) Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

$$u_0 = 500$$

$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$$

$$u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$$

$$u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

b) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1,04$.
On parle ici de **croissance exponentielle**.

c) $u_{n+1} = 1,04 u_n$

d) $q = 1,04 > 1$ donc la suite (u_n) est croissante.

e) Après 1 an, le capital est égal à : $u_1 = 1,04 \times 500$

Après 2 ans, le capital est égal à : $u_2 = 1,04^2 \times 500$

Après 3 ans, le capital est égal à : $u_3 = 1,04^3 \times 500$

De manière générale, après n années, le capital est : $u_n = 1,04^n \times 500$

Partie 3 : Variation et représentation graphique

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 strictement positif.

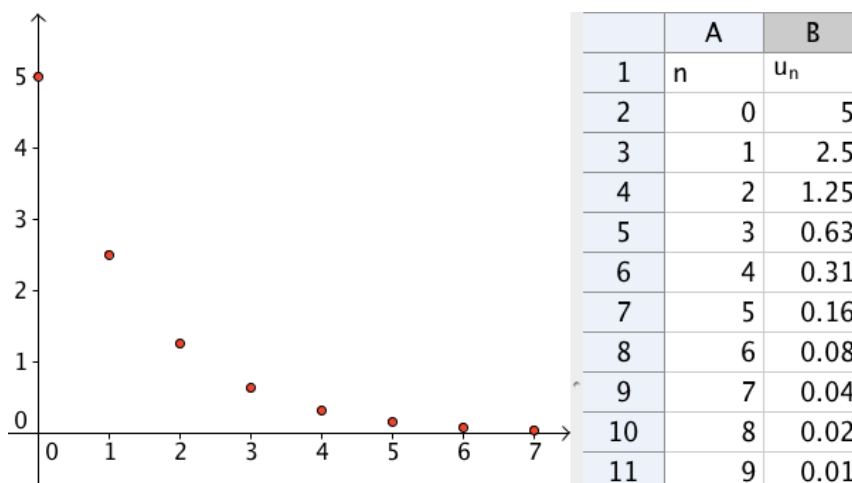
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.

- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

La suite géométrique (u_n) définie par $u_{n+1} = 0,5 u_n$ et $u_0 = 5$ est décroissante car la raison est strictement positive et inférieure à 1.



Partie 4 : Comparaison de suites

Méthode : Comparer deux suites

Une banque propose deux options de placement :

- Placement A : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6 % du capital de départ.

- Placement B : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4 % du capital de l'année précédente.

On suppose que le placement initial est de 200 €. L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre.

On note u_n la valeur du capital après n années pour le placement A et v_n la valeur du capital après n années pour le placement B.

- 1) a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
b) Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
- 2) Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ? On donnera le premier terme et la raison.
- 3) Exprimer u_n et v_n en fonction de n .
- 4) Déterminer le plus petit entier n , tel que $u_n < v_n$. Interpréter ce résultat.

Correction

1) a) Avec le placement A, on gagne chaque année 6 % de 200 € = 12 €.

$$u_0 = 200$$

$$u_1 = 200 + 12 = 212$$

$$u_2 = 212 + 12 = 224$$

$$u_3 = 224 + 12 = 236$$

b) Avec le placement B, chaque année le capital est multiplié par 1,04.

$$v_0 = 200$$

$$v_1 = 1,04 \times 200 = 208$$

$$v_2 = 1,04 \times 208 = 216,32$$

$$v_3 = 1,04 \times 216,32 = 224,97$$

2) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 200$ et de raison $r = 12$.
 (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 200$ et de raison $q = 1,04$.

$$3) u_n = 200 + 12n$$

$$v_n = 200 \times 1,04^n$$

4) Saisir l'expression du terme général, comme pour une fonction :

$$Y_1 \equiv 200 + 12X$$

$$Y_2 \equiv 200 * 1.04^X$$

Paramétrer la Table avec un pas de 1 et afficher la table :

Le plus petit entier n , tel que $u_n < v_n$ est 21.

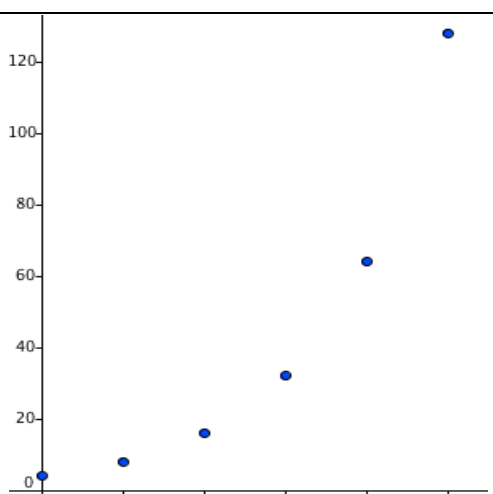
Cela signifie qu'à partir de 21 années, le placement B devient plus rentable que le placement A.

X	Y ₁	Y ₂
14	368	346.34
15	380	360.19
16	392	374.6
17	404	389.58
18	416	405.16
19	428	421.37
20	440	438.22
21	452	455.75
22	464	473.98
23	476	492.94
24	488	512.66

X=21

Décibels : Téléphones VS Avion

 Vidéo <https://youtu.be/mvXGq5S0eAM>

RÉSUMÉ	(u_n) une suite géométrique de raison q positive de premier terme u_0 positif.	Exemple : $q = 2$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$	$u_n = 4 \times 2^n$
Variations	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	$q = 2 > 1$ La suite (u_n) est croissante.
Représentation graphique	On parle de croissance exponentielle.	



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales