SUITES GÉOMÉTRIQUES

**Partie 1 : Relation de récurrence**

Exemples d’introduction :

a) Considérons la suite $(u\_{n})$ où l’on passe d’un terme au suivant en multipliant par 2.

Si le premier terme est égal à 5, les termes suivants sont :

$u\_{0}=5$,

$u\_{1}=10$,

$u\_{2}=20$,

$u\_{3}=40$.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $\left\{\begin{array}{c}u\_{0}=5 \\u\_{n+1}=2u\_{n}\end{array}\right.$

b) Soit la suite géométrique $(v\_{n})$ de premier terme 4 et de raison 0,1.

Les premiers termes successifs sont :

$v\_{0}$ = 4

$v\_{1}$ = 0,1 $×$ 4 = 0,4

$v\_{2}$ = 0,1 $×$ 0,4 = 0,04

$v\_{3}$ = 0,1 $×$ 0,04 = 0,004

La suite est donc définie par : $\left\{\begin{array}{c}v\_{0}=4 \\v\_{n+1}=0,1×v\_{n}\end{array}\right.$

Définition : Une suite $(u\_{n})$ est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel $q$, strictement positif, tel que pour tout entier $n$, on a : $u\_{n+1}=q×u\_{n}$.

Le nombre $q$ est appelé **raison** de la suite.

Remarque : Dans le cas où $q<0$, la suite est également géométrique mais cette situation n’est pas au programme cette année.

Exemple concret :

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 %.

Chaque année, le capital est donc multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

$u\_{1}=1,04×500=520$

$$u\_{2}=1,04×520=540,80$$

$u\_{3}=1,04×540,80=562,432$

De manière générale : $u\_{n+1}=1,04×u\_{n}$ avec $u\_{0}=500$

**Partie 2 : Forme explicite en fonction de n**

Propriété : $(u\_{n})$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u\_{0}$.

Pour tout entier naturel $n$, on a : $u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$.

Méthode : Déterminer une expression en fonction de $n$ d’une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WTmdtbQpa0c**](https://youtu.be/WTmdtbQpa0c)

a) Déterminer l’expression en fonction de $n$ de la suite géométrique définie par :

$$\left\{\begin{array}{c}u\_{0}=3 \\u\_{n+1}=4u\_{n}\end{array}\right.$$

b) Déterminer l’expression en fonction de $n$ de la suite géométrique définie par :

$$\left\{\begin{array}{c}u\_{1}=5 \\u\_{n+1}=2u\_{n}\end{array}\right.$$

**Correction**

a) On a : $u\_{0}=3$ et $u\_{n+1}=4u\_{n}$

On passe d’un terme au suivant en multipliant par 4, donc la raison $q$ est égale à $4 $et le premier terme $u\_{0}$ est égal à 3.

Ainsi :

$$u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$$

$$u\_{n}=3×4^{n}$$

b) On a : $u\_{1}=5$ et $u\_{n+1}=2u\_{n}$

On passe d’un terme au suivant en multipliant par 2 donc la raison $q$ est égale à 2.

Ici, le terme $u\_{0}$ n’est pas donné mais on peut le calculer.

Pour passer de $u\_{1}$ à $u\_{0},$ on divise par 2 (« marche arrière ») donc :

$$u\_{0}=\frac{u\_{1}}{2}=\frac{5}{2}=2,5.$$

La raison $q$ est égale à $2 $et le premier terme $u\_{0}$ est égal à 2,5.

Ainsi :

$$u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$$

$$u\_{n}=2,5×2^{n}$$

⚠️ À noter : Il peut être pratique d’appliquer directement la formule : $u\_{n}=u\_{1}×q^{n-1}$

**Partie 3 : Variation et représentation graphique**

Propriété : $(u\_{n})$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u\_{0}$strictement positif.

- Si $q>1$ alors la suite $(u\_{n})$ est croissante.

- Si $q=1$ alors la suite $(u\_{n})$ est constante.

- Si $0<q<1$ alors la suite $(u\_{n})$ est décroissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d’une suite géométrique

Déterminer le sens de variation des suites géométriques $(u\_{n})$ et $(v\_{n})$ définies par :

a) $u\_{n}=4×2^{n}$ b) $\left\{\begin{array}{c}v\_{0}=2 \\v\_{n+1}=\frac{1}{2}v\_{n}\end{array}\right.$

**Correction**

a) La suite géométrique $(u\_{n})$ définie par $u\_{n}=4×2^{n}$ est croissante car $q=2$ donc $q>1$

b) La suite géométrique $(v\_{n})$ définie par $v\_{n+1}=\frac{1}{2}v\_{n}$ et $v\_{0}=2 $ est décroissante car $q=\frac{1}{2}$ donc $0<q<1$.

Méthode : Étudier un problème à l’aide d’une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WTmdtbQpa0c**](https://youtu.be/WTmdtbQpa0c)

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an.

On note $u\_{n}$ la valeur du capital après $n$ années.

a) Calculer $u\_{1}, u\_{2}$ et$u\_{3}$.

b) Quelle est la nature de la suite ($u\_{n}$) ? On donnera son premier terme et sa raison.

c) Exprimer $u\_{n+1}$ en fonction de $u\_{n}$.

d) Donner la variation de la suite ($u\_{n}$).

e) Exprimer $u\_{n}$ en fonction de $n$.

**Correction**

a) Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

 $u\_{0}=500$

$$ u\_{1}=1,04×500=520$$

$$ u\_{2}=1,04×520=540,80$$

$$ u\_{3}=1,04×540,80=562,432$$

b) ($u\_{n}$) est une suite géométrique de premier terme $u\_{0}=500$ et de raison $q=1,04$.

On parle ici de **croissance exponentielle**.

c) $u\_{n+1}=1,04 u\_{n}$

d) $q=1,04>1$donc la suite (*un*) est croissante.

e) Après 1 an, le capital est égal à : $u\_{1}=1,04×500$

 Après 2 ans, le capital est égal à : $u\_{2}=1,04^{2}×500$

 Après 3 ans, le capital est égal à : $u\_{3}=1,04^{3}×500$

De manière générale, après $n$ années, le capital est : $u\_{n}=1,04^{n}×500$

**Partie 4 : Comparaison de suites**

Méthode : Comparer deux suites

Une banque propose deux options de placement :

- Placement A : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6 % du capital de départ.

- Placement B : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4 % du capital de l’année précédente.

On suppose que le placement initial est de 200 €. L’objectif est de savoir à partir de combien d’années un placement est plus intéressant que l’autre.

On note $u\_{n}$ la valeur du capital après $n$ années pour le placement A et $v\_{n}$ la valeur du capital après $n$ années pour le placement B.

1) a) Calculer $u\_{1}$, $u\_{2}$ et$u\_{3}$.

 b) Calculer $v\_{1}$, $v\_{2}$ et$v\_{3}$.

2) Quelle est la nature des suites ($u\_{n}$) et ($v\_{n}$) ? On donnera le premier terme et la raison.

3) Exprimer $u\_{n}$ et $v\_{n}$ en fonction de $n$.

4) Déterminer le plus petit entier $n$, tel que $u\_{n}<v\_{n}$. Interpréter ce résultat.

**Correction**

1) a) Avec le placement A, on gagne chaque année 6 % de 200 € = 12 €.

 $u\_{0}=200$

 $u\_{1}=200+12=212$

 $u\_{2}=212+12=224$

 $u\_{3}=224+12=236$

b) Avec le placement B, chaque année le capital est multiplié par 1,04.

 $v\_{0}=200$

 $v\_{1}=1,04×200=208$

 $v\_{2}=1,04×208=216,32$

 $v\_{3}=1,04×216,32=224,97$

2) ($u\_{n}$) est une suite arithmétique de premier terme $u\_{0}=200$ et de raison $r=12$.

($v\_{n}$) est une suite géométrique de premier terme $v\_{0}=200$ et de raison $q=1,04$.



3) $u\_{n}=200+12n$

 $v\_{n}=200×1,04^{n}$

4) Saisir l’expression du terme général, comme pour

une fonction :

 

Paramétrer la Table avec un pas de 1 et afficher la table :

Le plus petit entier $n$, tel que $u\_{n}<v\_{n}$ est 21.

Cela signifie qu’à partir de 21 années, le placement B

devient plus rentable que le placement A.

Décibels : Téléphones VS Avion

 **Vidéo** [**https://youtu.be/mvXGq5S0eAM**](https://youtu.be/mvXGq5S0eAM)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **RÉSUMÉ** | ($u\_{n}$) une suite géométrique * de raison $q$positive
* de premier terme $u\_{0}$positif.
 | Exemple :$q=2$ et $u\_{0}=4$ |
| Définition | $$u\_{n+1}=q×u\_{n}$$ | $$u\_{n+1}=2×u\_{n}$$Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2. |
| Propriété | $$u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$$ | $$u\_{n}=4×2^{n}$$ |
| Sens de variation | Si $q>1$ : ($u\_{n}$) est croissante.Si $0<q<1$ : ($u\_{n}$) est décroissante. | $$q=2>1$$La suite ($u\_{n}$) est croissante. |
| Représentation graphique | On parle de croissance exponentielle. |  |

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)