SUITES ARITHMÉTIQUES

Partie 1 : Relation de récurrence

Exemples :

a) Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
u_0 = 3,
u_1 = 8,
u_2 = 13,
u_3 = 18.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.
La suite est donc définie par : $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_0 = 3$.

b) Soit la suite numérique (v_n) de premier terme 5 et de raison -2.
Les premiers termes successifs sont :
v_0 = 5,
v_1 = 5 – 2 = 3,
v_2 = 3 – 2 = 1,
v_3 = 1 – 2 = –1 .
La suite est donc définie par : $v_{n+1} = v_n - 2$ et $v_0 = 5$.

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Partie 2 : Forme explicite en fonction de n

Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$
$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Méthode : Exprimer une suite arithmétique en fonction de n

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive.
Il commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d'une longueur de 3000 m.
Au « jour 1 », il court 3150 m. Au « jour 2 », il court 3300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille.
On note u_n la distance parcourue au « jour n » d'entraînement.

a) Calculer u_3 et u_4.
b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
d) Exprimer u_n en fonction de n.
e) À partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n > 5000$. Interpréter le résultat.

Correction
a) u_0 = 3000
u_1 = 3150
u_2 = 3300
u_3 = 3450
u_4 = 3600

b) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 = 3000 et de raison r = 150.
On parle ici de **croissance linéaire**.

c) $u_{n+1} = u_n + 150$

d) Après 1 jour, il parcourt : $u_1 = 3000 + 150 \times 1$
Après 2 jours, il parcourt : $u_2 = 3000 + 150 \times 2$
Après 3 jours, il parcourt : $u_3 = 3000 + 150 \times 3$
De manière générale, après n jours, il parcourt : $u_n = 3000 + 150n$.

e) $u_n > 5000$
$3000 + 150n > 5000$
$150n > 5000 - 3000$
$150n > 2000$
$n > 2000 : 150 \approx 13{,}3$
Donc $n = 14$, car n est un entier.
A partir du 14^{e} jour, l'athlète parcourra plus de 5000 m par jour.

Partie 3 : Variation et représentation graphique

1) Variation

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si r > 0 alors la suite (u_n) est croissante.
- Si r = 0 alors la suite (u_n) est constante.
- Si r < 0 alors la suite (u_n) est décroissante.

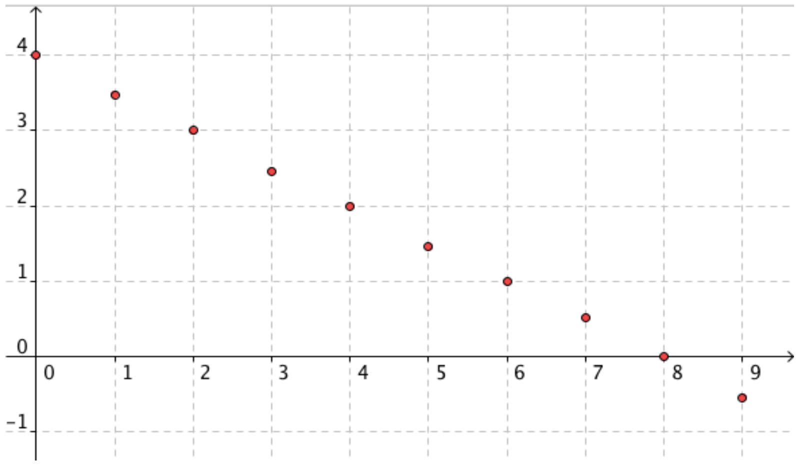
Exemple : La suite arithmétique (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - 4$ et $u_0 = 5$ est décroissante car de raison négative et égale à –4.

Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

2) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



RÉSUMÉ	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de **premier terme** u_0.	**Exemple :** $r = -0{,}5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à –0,5.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = 4 - 0{,}5n$
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0{,}5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarques : Les points de la représentation graphique sont alignés. On parle de croissance linéaire.