SUITES ARITHMÉTIQUES

**Partie 1 : Relation de récurrence**

Exemples d’introduction :

a) Considérons la suite $(u\_{n})$ où l’on passe d’un terme au suivant en ajoutant 5.

Si le premier terme est égal à 3, les termes suivants sont :

$u\_{0}=3$,

$u\_{1}=8$,

$u\_{2}=13$,

$u\_{3}=18$.

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $\left\{\begin{array}{c}u\_{0}=3 \\u\_{n+1}=u\_{n}+5\end{array}\right.$

b) Soit la suite arithmétique $(v\_{n})$ de premier terme 5 et de raison $-2$.

Les premiers termes successifs sont :

$v\_{0}$ = 5,

$v\_{1}$ = 5 – 2 = 3,

$v\_{2}$ = 3 – 2 = 1,

$v\_{3}$ = 1 – 2 = –1.

La suite est donc définie par : $\left\{\begin{array}{c}v\_{0}=5 \\v\_{n+1}=v\_{n}-2\end{array}\right.$

Définition : Une suite $(u\_{n})$ est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre $r$ tel que pour tout entier $n$, on a : $u\_{n+1}=u\_{n}+r$.

Le nombre $r$ est appelé **raison** de la suite.

**Partie 2 : Forme explicite en fonction de n**

Propriété : Si $\left(u\_{n}\right)$ est une suite arithmétique de raison $r$, on a :

 $u\_{n}=u\_{0}+nr$

Méthode : Déterminer une expression en fonction de $n$ d’une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6O0KhPMHvBA**](https://youtu.be/6O0KhPMHvBA)

a) Déterminer l’expression, en fonction de $n,$ de la suite arithmétique définie par :

$$\left\{\begin{array}{c}u\_{0}=7 \\u\_{n+1}=u\_{n}-4\end{array}\right.$$

b) Déterminer l’expression, en fonction de $n,$ de la suite arithmétique définie par :

$$\left\{\begin{array}{c}u\_{1}=5 \\u\_{n+1}=u\_{n}+3\end{array}\right.$$

**Correction**

a) On a : $u\_{0}=7$ et $u\_{n+1}=u\_{n}-4$

On passe d’un terme au suivant en ajoutant $-4$, et donc la raison $r$ est égale à $-4 $et le premier terme $u\_{0}$ est égal à 7.

Ainsi :

$$u\_{n}=u\_{0}+nr$$

$$u\_{n}=7+n×\left(-4\right)$$

$$u\_{n}=7-4n$$

b) On a : $u\_{1}=5$ et $u\_{n+1}=u\_{n}+3$

On passe d’un terme au suivant en ajoutant $3$, donc la raison $r$ est égale à 3.

Ici, le terme $u\_{0}$ n’est pas donné mais on peut le calculer.

Pour passer de $u\_{1}$ à $u\_{0},$ on retire 3 (« marche arrière ») donc $u\_{0}=u\_{1}-3=5-3=2$.

Ainsi :

$$u\_{n}=u\_{0}+nr$$

$$u\_{n}=2+3n$$

⚠️ À noter : Il peut être pratique d’appliquer directement la formule : $u\_{n}=u\_{1}+\left(n-1\right)r$

Méthode : Exprimer une suite arithmétique en fonction de $n$

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6O0KhPMHvBA**](https://youtu.be/6O0KhPMHvBA)

Pour préparer une course, un athlète décide de s’entraîner de façon progressive.

Il commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d’une longueur de 3 000 m. Au « jour 1 », il court 3 150 m. Au « jour 2 », il court 3 300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille.

On note $u\_{n}$ la distance parcourue au « jour $n$ » d’entraînement.

a) Calculer $u\_{3}$ et$u\_{4}$.

b) Quelle est la nature de la suite ($u\_{n}$) ? On donnera son premier terme et sa raison.

c) Exprimer $u\_{n+1}$ en fonction de $u\_{n}$.

d) Exprimer $u\_{n}$ en fonction de $n$.

e) À partir de quelle valeur de $n$, a-t-on $u\_{n}>5 000. $Interpréter le résultat.

**Correction**

a) $u\_{0} $= 3 000

 $u\_{1}$ = 3 150

 $u\_{2}$ = 3 300

 $u\_{3}$ = 3 450

 $u\_{4}$ = 3 600

b) ($u\_{n}$) est une suite arithmétique de premier terme $u\_{0}$ = 3 000 et de raison $r$= 150.

On parle ici de **croissance linéaire**.

c) $u\_{n+1}=u\_{n}+150$

d) Après 1 jour, il parcourt : $u\_{1}=3 000+150×1$

 Après 2 jours, il parcourt : $u\_{2}=3 000+150×2$

 Après 3 jours, il parcourt : $u\_{3}=3 000+150×3$

De manière générale, après $n$ jours, il parcourt : $u\_{n}=3 000+150n$.

e) $u\_{n}>5 000$

$$3 000+150n>5 000$$

$$150n>5 000-3 000$$

$$150n>2 000$$

$$n>2 000 :150≈13,3$$

Donc $n=14$, car $n$ est un entier.

A partir du 14e jour, l’athlète parcourra plus de 5 000 m par jour.

**Partie 3 : Variation et représentation graphique**

 1) Variation

Propriété : $(u\_{n})$ est une suite arithmétique de raison $r$*.*

- Si $r$ > 0 alors la suite $(u\_{n})$ est croissante.

- Si $r$ = 0 alors la suite $(u\_{n})$ est constante.

- Si $r$ < 0 alors la suite $(u\_{n})$ est décroissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d’une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/R3sHNwOb02M**](https://youtu.be/R3sHNwOb02M)

Étudier les variations des suites arithmétiques $(u\_{n})$ et $(v\_{n})$ définies par :

$$a) u\_{n}=3+5n $$

b) $\left\{\begin{array}{c}v\_{0}=-3 \\v\_{n+1}=v\_{n}-4\end{array}\right.$

**Correction**

a) $(u\_{n})$ est croissante car de raison positive et égale à 5.

b) On passe d’un terme au suivant en ajoutant $-4$. $(v\_{n})$ est décroissante car de raison négative et égale à $-4$.

 2) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite arithmétique de raison –0,5 et de premier terme 4.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **RÉSUMÉ** | $(u\_{n})$ une suite arithmétique * de raison $r$
* de premier terme $u\_{0}$.
 | Exemple :$r=-0,5$ et $u\_{0}=4$ |
| Définition | $$u\_{n+1}=u\_{n}+r$$ | $$u\_{n+1}=u\_{n}-0,5$$La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0,5$. |
| Propriété | $$u\_{n}=u\_{0}+nr$$ | $$u\_{n}=4-0,5n$$ |
| Sens De variation | Si $r$ > 0 : $(u\_{n})$ est croissante.Si $r$ < 0 : $(u\_{n})$ est décroissante. | $$r=-0,5<0$$La suite $(u\_{n})$ est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :Les points de la représentation graphique sont alignés.La croissance est linéaire. |  |

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)