STATISTIQUES ET PROBABILITÉS – Chapitre 2/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/5oBnmZVrOXE

Partie 1 : Indépendance de deux événements

Définition : On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Méthode : Démontrer que deux évènements sont indépendants

Vidéo https://youtu.be/OPuoB5EuOAQ

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement "On tire un roi".
Soit T l'événement "On tire un trèfle".
Les événements R et T sont-ils donc indépendants ?

b) Même question en reprenant l'expérience précédente
après avoir ajouté deux jokers au jeu de cartes.

Correction

a) On a : $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
Par ailleurs, $P_T(R)$ est la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles. On a alors :
$P_T(R) = \frac{1}{8}$
Ainsi, $P_T(R) = P(R)$.
Les événements R et T sont donc indépendants.

b) On a : $P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$.
$P_T(R) = \frac{1}{8}$
Ainsi, $P_T(R) \neq P(R)$.
Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

Partie 2 : Succession d'évènements indépendants

Exemples :

1) On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).

2) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Définition : Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :
- elles ont les mêmes issues,
- chaque issue possède la même probabilité.

Propriété : On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités P(A) et P(B).
Si on répète l'expérience deux fois de suite :
- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$,
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

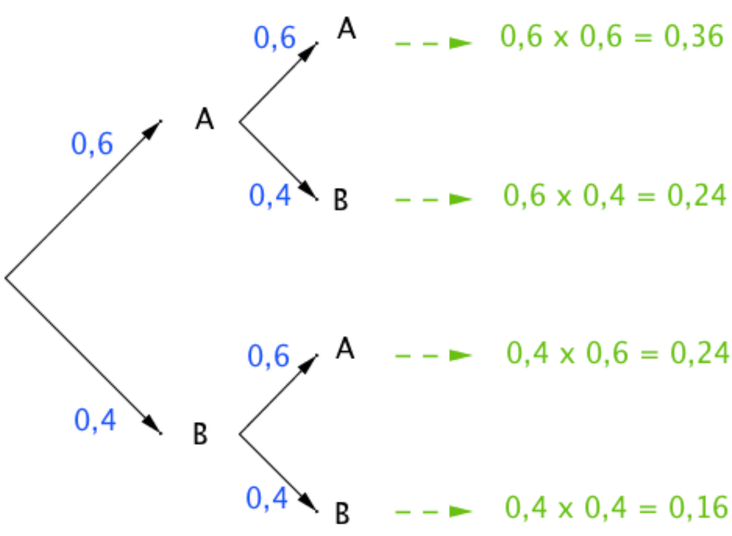
Méthode : Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes dans un arbre

Vidéo https://youtu.be/e7jH8a1cDtg

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer la probabilité :
a) d'obtenir deux boules blanches
b) une boule blanche et une boule rouge
c) au moins une boule blanche.

Correction
1) On note A l'issue "On tire une boule blanche" et B l'issue "On tire une boule rouge".
$P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$ et $P(B) = \frac{2}{5} = 0,4$.

On résume les issues de l'expérience dans un arbre de probabilité :



2) a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue (A ; A) :
$P_1 = 0,36$ (d'après l'arbre).

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues (A ; B) et (B ; A) :
$P_2 = 0,24 + 0,24 = 0,48$.

c) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues (A ; B), (A ; A) et (B ; A) :
$P_2 = 0,24 + 0,36 + 0,24 = 0,84$.

Remarques :

- Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
- Pour une expérience dont le nombre de répétition est supérieur à 2, le principe reste le même.

Exemple :
On lance un dé à six faces 4 fois de suite.
On considère les issues suivantes :
A : On obtient un nombre pair.
B : On obtient un 1.
C : On obtient un 3 ou un 5.
La probabilité d'obtenir la suite d'issues (A ; B ; A ; C) est égale à :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$$