STATISTIQUES ET PROBABILITÉS – Chapitre 1/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/5oBnmZVrOXE

Partie 1 : Fréquence conditionnelle, fréquence marginale

Méthode : Déterminer une fréquence conditionnelle, une fréquence marginale

Vidéo https://youtu.be/SkhjnCoExD8

Dans une entreprise qui compte 360 employés, on compte 60 % d'hommes et parmi ceux-là, 12,5 % sont des cadres.
Par ailleurs, 87,5 % des femmes de cette entreprise sont ouvrières ou techniciennes.

1) Compléter le tableau.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres			
Ouvriers, techniciens			
Total			

2) À l'aide de ce tableau, déterminer :
a) La fréquence marginale de cadres.
b) La fréquence conditionnelle des ouvriers, techniciens parmi les hommes.

Correction

1)

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	12,5% x 216 = 27	144 – 126 = 18	27 + 18 = 45
Ouvriers, techniciens	216 – 27 = 189	87,5% x 144 = 126	189 + 126 = 315
Total	60% x 360 = 216	360 – 216 = 144	360

2) a) La fréquence marginale se lit en « marge » du tableau.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	**45**
Ouvriers, techniciens	189	126	315
Total	216	144	**360**

On compte 360 employés en tout et 45 sont des cadres.
La fréquence marginale de cadres est donc égale à : $\frac{45}{360} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%$.

b) La fréquence conditionnelle restreint l'effectif total. Ici, on ne considère que les hommes car la « condition » est « parmi les hommes ».

La fréquence conditionnelle se lit sur une ligne ou une colonne intérieure du tableau.
Ici, on ne va donc considérer que la colonne concernant les hommes (condition).

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	27	18	**45**
Ouvriers, techniciens	**189**	126	315
Total	**216**	144	**360**

On compte 216 hommes en tout et parmi eux, 189 sont des ouvriers, techniciens.

La fréquence conditionnelle d'ouvriers, techniciens parmi les hommes est donc égale à : $\frac{189}{216}$ $= 0{,}875 = 87{,}5\ \%$.

Partie 2 : Probabilité conditionnelle et tableau croisé

Définition :
On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide d'un tableau croisé
Vidéo https://youtu.be/7tS60nk6Z2I
Vidéo https://youtu.be/Shh5IdHwqqw

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :
A : « Le patient a pris le médicament A. »
G : « Le patient est guéri. »
Calculer : a) $P(A)$ b) $P(G)$ c) $P(G \cap A)$ d) $P(\bar{G} \cap A)$

2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.
Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu'**il est guéri.
b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.
Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu'**il a pris le médicament B.

Correction
1) a) La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à :
$P(A) = \frac{455}{800} \approx 0{,}57 = 57\ \%$.
b) La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à : $P(G) = \frac{674}{800} \approx 0{,}84 = 84\ \%$.

c) La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à $P(G \cap A) = \frac{383}{800} \approx 0{,}48 = 48\ \%$.

d) La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à : $P(\bar{G} \cap A) = \frac{72}{800} \approx 0{,}09 = 9\ \%$.

2) a)

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**'il est guéri se note $P_G(A)$ et est égale à $P_G(A) = \frac{383}{674} \approx 0{,}57 = 57\ \%$. On regarde uniquement la ligne des patients guéris.

b) La probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**'il a pris le médicament B se note $P_B(G)$ et est égale à $P_B(G) = \frac{291}{345} \approx 0{,}84 = 84\ \%$. On regarde uniquement la colonne du médicament B.

Partie 3 : Probabilité conditionnelle et arbre pondéré

1) Exemple

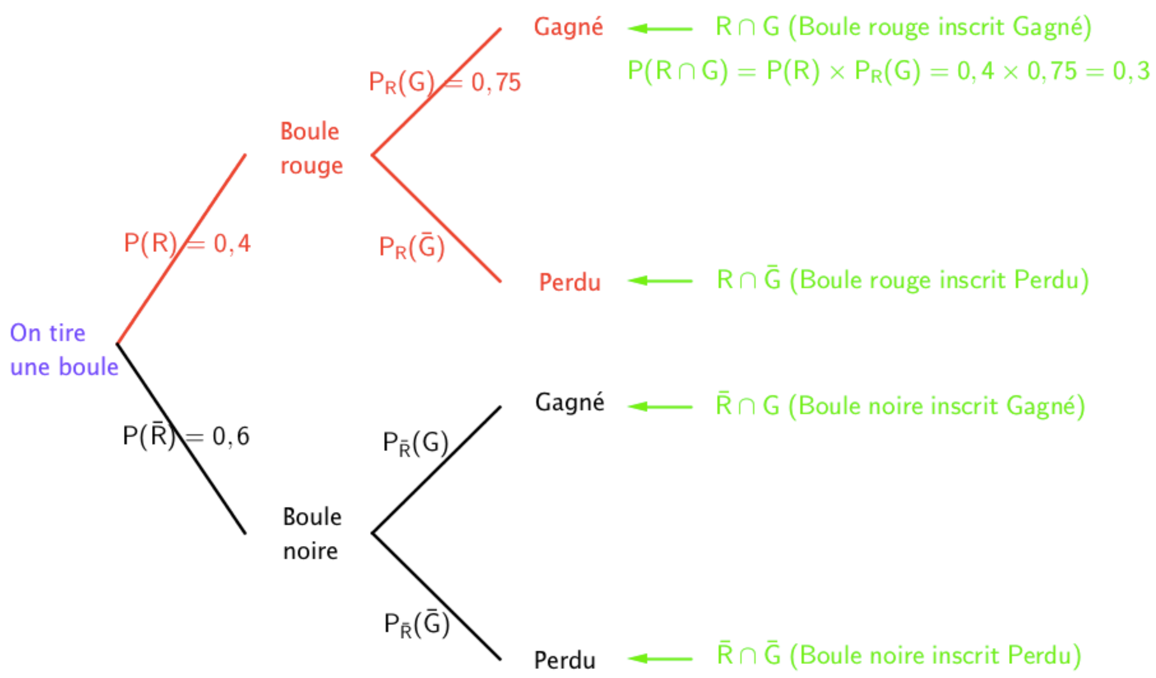
Vidéo https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu"
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.
Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement "On tire une boule rouge".
Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné"
Donc $R \cap G$ est l'événement "On tire une boule rouge marquée Gagné".

Alors : $P(R) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$P_R(G) = \frac{15}{20} = 0{,}75$: Parmi les boules rouges, 15 sont marquées Gagné.

L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



2) <u>Règles</u>

<u>Règle 1 :</u> La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

<u>Exemples :</u>
- A partir du nœud "On tire une boule", on a : $P(R) + P(\bar{R}) = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$
- A partir du nœud "Boule rouge", on a : $P_R(\bar{G}) = 1 - P_R(G) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

<u>Règle 2 :</u> La probabilité d'une "feuille" (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

<u>Exemple :</u>
On considère la feuille $R \cap G$.
On a : $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$

<u>Règle 3 (Formule des probabilités totales) :</u> La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune de ces "feuilles".

<u>Exemple :</u>
L'événement "On tire une boule marquée Gagné" est associé aux feuilles $R \cap G$ et $\bar{R} \cap G$.
On a :

$P(R \cap G) = 0{,}3$
$P(\bar{R} \cap G) = \frac{9}{50}$ = 0,18 (Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)
Donc $P(G) = P(R \cap G) + P(\bar{R} \cap G) = 0{,}3 + 0{,}18 = 0{,}48$.

Méthode : Calculer la probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles

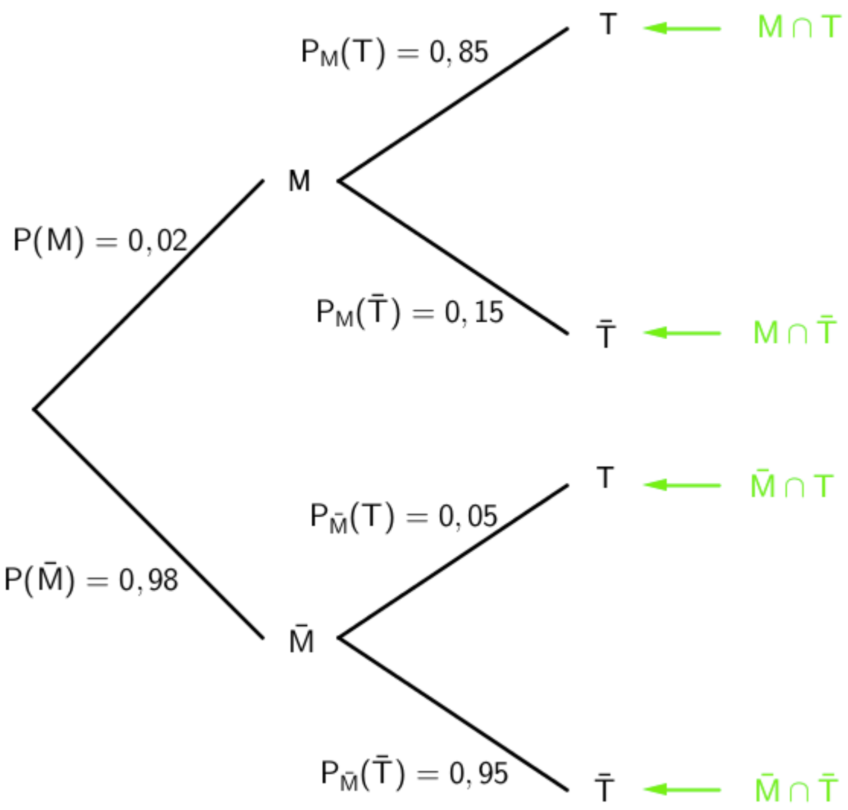
Vidéo https://youtu.be/qTpTBoZA7zY

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

Correction



La probabilité que le test soit positif est associée aux deux feuilles $M \cap T$ et $\overline{M} \cap T$.
$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$ (Formule des probabilités totales)
= 0,02 x 0,85 + 0,98 x 0,05 = 0,066.
La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6%.