DÉRIVATION – Chapitre 2/2

Partie 1 : Fonction dérivée

Définition :
La fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note $f\,'$.

Formules de dérivation de fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

$(f+g)' = f' + g'$
$(kf)' = kf' \quad k \in \mathbb{R}$

Méthode : Calculer des fonctions dérivées

Vidéo https://youtu.be/uTk3T_GfwYo

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :
a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = x^2 + 5$ c) $f(x) = 5x^3$ d) $f(x) = 3x^2 + 4x$

Correction
a) $f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$

b) $f(x) = x^2 + 5 \rightarrow f'(x) = 2x + 0 = 2x$

c) $f(x) = 5 \times x^3 \rightarrow f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

d) $f(x) = 3 \times x^2 + 4x \rightarrow f'(x) = 3 \times 2x + 4 = 6x + 4$

Partie 2 : Fonction dérivée d'une fonction polynôme

1) Fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Pour déterminer la fonction dérivée $f\,'$, on applique la technique suivante :

$$f(x) = 5 \times x^2 - 3x + 2$$
$$\downarrow$$
$$f'(x) = 5 \times 2x - 3 + 0$$
$$= 10x - 3$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f ', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = a \times 2x + b$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/5WDIrv_bEYE

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$
d) $k(x) = x^2 + x + 1$ e) $l(x) = 5x^2 + 5$ f) $m(x) = -x^2 + 7x$

Correction

a) $f(x) = 4 \times x^2 - 6x + 1$ donc $f'(x) = 4 \times 2x - 6 + 0 = 8x - 6$

b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ donc $g'(x) = 2x - 2$

c) $h(x) = -3 \times x^2 + 2x + 8$ donc $h'(x) = (-3) \times 2x + 2 = -6x + 2$

d) $k(x) = x^2 + 1x + 1$ donc $k'(x) = 2x + 1$

e) $l(x) = 5 \times x^2 + 5$ donc $l'(x) = 5 \times 2x = 10x$

f) $m(x) = -x^2 + 7x$ donc $m'(x) = -2x + 7$

2) Fonction polynôme de degré 3

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.
Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x) = 2 \times x^3 - 3 \times x^2 + 5x - 1$$
$$\downarrow$$
$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 5 - 0$$
$$= 6x^2 - 6x + 5$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$
c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$
d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$
e) $l(x) = 4x^3 + 1$
f) $m(x) = -x^3 + 7x$

Correction
a) $f(x) = x^3 - 3 \times x^2 + 2x - 5$ donc $f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$

b) $g(x) = 5 \times x^3 + 2 \times x^2 + 2x - 7$
donc $g'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 2 = 15x^2 + 4x + 2$

c) $h(x) = -2 \times x^3 - 3 \times x^2 - 7x + 8$
donc $h'(x) = (-2) \times 3x^2 - 3 \times 2x - 7 = -6x^2 - 6x - 7$

d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ donc $k'(x) = -3x^2 + 2x$

e) $l(x) = 4 \times x^3 + 1$ donc $l'(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2$

f) $m(x) = -x^3 + 7x$ donc $m'(x) = -3x^2 + 7$

Partie 3 : Variations d'une fonction polynôme

Théorème :
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante.

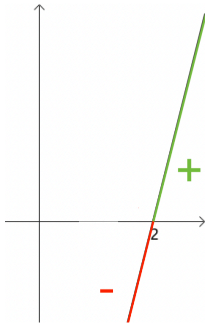
Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/EXTobPZzORo
Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnlMIk

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
a) Calculer la fonction dérivée de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

Correction
a) $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.

b) <u>Étude du signe de la dérivée :</u>
On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $4x - 8 = 0$
$4x = 8$
$x = \frac{8}{4} = 2$.



La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.
Donc f' est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis positive (après $x = 2$).

c) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.
La fonction f admet un minimum égal à -7 en $x = 2$.

<u>Méthode :</u> Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo https://youtu.be/Ktc-PThiP6I

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.
1) a) Calculer la fonction dérivée de f.
b) Démontrer que $f'(x) = 3(x + 4)(x - 1)$.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.

Correction
1) a) On a :
$f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 = 3x^2 + 9x - 12$
b) Développons $3(x + 4)(x - 1)$:
$3(x + 4)(x - 1)$
$=(3x + 12)(x - 1)$
$= 3x^2 - 3x + 12x - 12$
$= 3x^2 + 9x - 12$
$= f'(x)$

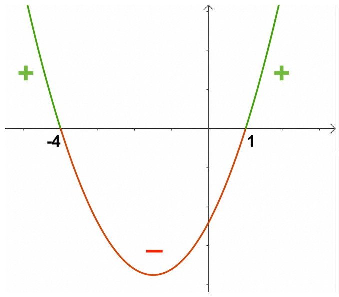
Donc $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$.

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

$3(x+4)(x-1) = 0$

$x + 4 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$x = -4$ $\quad$ $x = 1$



La dérivée s'annule en -4 et 1.
Comme $a = 3 > 0$, les branches de la parabole représentant la fonction dérivée sont tournées vers le haut (position « 😊 »).
La dérivée est donc d'abord positive, puis négative, puis positive.

3) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

En effet :

$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2} \times (-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$

$f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}$

4)