

DÉRIVATION – Chapitre 2/2

Partie 1 : Fonction dérivée

Définition :

La fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .

Formules de dérivation de fonctions usuelles :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

$(f + g)' = f' + g'$
$(kf)' = kf' \quad k \in \mathbb{R}$

Méthode : Calculer des fonctions dérivées

 Vidéo https://youtu.be/uTk3T_GfwYo

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :

a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = x^2 + 5$ c) $f(x) = 5x^3$ d) $f(x) = 3x^2 + 4x$

Correction

a) $f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$

b) $f(x) = x^2 + 5 \rightarrow f'(x) = 2x + 0 = 2x$

c) $f(x) = 5 \times x^3 \rightarrow f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

d) $f(x) = 3 \times x^2 + 4x \rightarrow f'(x) = 3 \times 2x + 4 = 6x + 4$

Partie 2 : Fonction dérivée d'une fonction polynôme

1) Fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Pour déterminer la fonction dérivée f' , on applique la technique suivante :

$$f(x) = 5 \times x^2 - 3x + 2$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = 5 \times 2x - 3 + 0$$

$$= 10x - 3$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle **fonction dérivée** de f , notée f' , la fonction définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = a \times 2x + b$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré

 **Vidéo** https://youtu.be/5WDIrv_bEYE

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$
d) $k(x) = x^2 + x + 1$ e) $l(x) = 5x^2 + 5$ f) $m(x) = -x^2 + 7x$

Correction

a) $f(x) = 4 \times x^2 - 6x + 1$ donc $f'(x) = 4 \times 2x - 6 + 0 = 8x - 6$
b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ donc $g'(x) = 2x - 2$
c) $h(x) = -3 \times x^2 + 2x + 8$ donc $h'(x) = (-3) \times 2x + 2 = -6x + 2$
d) $k(x) = x^2 + 1x + 1$ donc $k'(x) = 2x + 1$
e) $l(x) = 5 \times x^2 + 5$ donc $l'(x) = 5 \times 2x = 10x$
f) $m(x) = -x^2 + 7x$ donc $m'(x) = -2x + 7$

2) Fonction polynôme de degré 3

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1.$$

Pour déterminer la fonction dérivée f' , on applique la technique suivante :

$$f(x) = 2 \times x^3 - 3 \times x^2 + 5x - 1$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 5 - 0$$

$$= 6x^2 - 6x + 5$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur \mathbb{R} par
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
 On appelle **fonction dérivée** de f , notée f' , la fonction définie sur \mathbb{R} par
 $f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

 Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ | b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ |
| c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$ | d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ |
| e) $l(x) = 4x^3 + 1$ | f) $m(x) = -x^3 + 7x$ |

Correction

- a) $f(x) = x^3 - 3 \times x^2 + 2x - 5$ donc $f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$
- b) $g(x) = 5 \times x^3 + 2 \times x^2 + 2x - 7$
 donc $g'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 2 = 15x^2 + 4x + 2$
- c) $h(x) = -2 \times x^3 - 3 \times x^2 - 7x + 8$
 donc $h'(x) = (-2) \times 3x^2 - 3 \times 2x - 7 = -6x^2 - 6x - 7$
- d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ donc $k'(x) = -3x^2 + 2x$
- e) $l(x) = 4 \times x^3 + 1$ donc $l'(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2$
- f) $m(x) = -x^3 + 7x$ donc $m'(x) = -3x^2 + 7$

Partie 3 : Variations d'une fonction polynôme

Théorème :

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

 Vidéo <https://youtu.be/EXTobPZzORo>

 Vidéo <https://youtu.be/zxyKLqnlMIk>

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

- a) Calculer la fonction dérivée de f .
- b) Déterminer le signe de f' en fonction de x .
- c) Dresser le tableau de variations de f .

Correction

a) On a : $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.

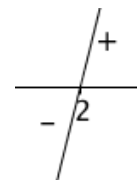
b) On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

Soit : $4x - 8 = 0$

Donc $4x = 8$ et $x = \frac{8}{4} = 2$.

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.

Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis ensuite positive (après $x = 2$).



c) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	$-$	\ominus	$+$
f			

En effet : $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.

La fonction f admet un minimum égal à -7 en $x = 2$.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo <https://youtu.be/Ktc-PThiP6I>

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) a) Calculer la fonction dérivée de f .

b) Démontrer que $f'(x) = 3(x + 4)(x - 1)$.

2) Déterminer le signe de f' en fonction de x .

3) Dresser le tableau de variations de f .

4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f .

Correction

1) a) On a :

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 = 3x^2 + 9x - 12$$

b) Développons $3(x + 4)(x - 1)$:

$$3(x + 4)(x - 1)$$

$$= (3x + 12)(x - 1)$$

$$= 3x^2 - 3x + 12x - 12$$

$$= 3x^2 + 9x - 12$$

$$= f'(x)$$

$$\text{Donc } f'(x) = 3(x + 4)(x - 1).$$

2) Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

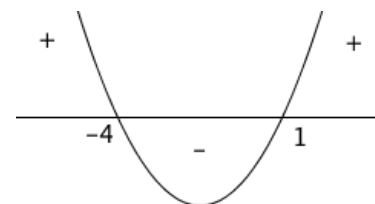
$$3(x+4)(x-1) = 0$$

$$x+4 = 0 \quad \text{ou} \quad x-1 = 0$$

$$x = -4 \quad \quad \quad x = 1$$

La dérivée s'annule en -4 et 1 .

Le coefficient de x^2 , égal à 3 , est positif, donc la parabole est tournée dans le sens « cuvette ». La dérivée est donc positive à l'extérieur de ses racines -4 et 1 .



3) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
f'		\oplus	\ominus	\oplus
f		61	$-\frac{3}{2}$	

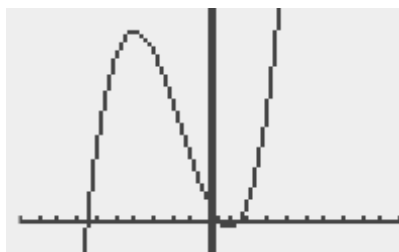
Arrows in the table indicate the function values: an arrow points from the left towards the local maximum at $x = -4$ (value 61), another arrow points from the local maximum down to the local minimum at $x = 1$ (value $-\frac{3}{2}$), and a third arrow points from the local minimum up towards the right.

En effet :

$$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2} \times (-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$$

$$f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}$$

4)



© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales