DÉRIVATION – Chapitre 2/2

**Partie 1 : Fonction dérivée**

Définition :

La fonction qui à tout réel $x$ associe le nombre dérivé de $f$ en $x$ est appelée **fonction dérivée** de $f$et se note $f '$.

Formules de dérivation de fonctions usuelles :

|  |  |
| --- | --- |
| **Fonction**  | **Dérivée**  |
| $f\left(x\right)=a$, $a\in R$ | $$f'\left(x\right)=0$$ |
| $f\left(x\right)=ax$, $a\in R$ | $$f'\left(x\right)=a$$ |
| $$f\left(x\right)=x^{2}$$ | $$f'\left(x\right)=2x$$ |
| $$f\left(x\right)=x^{3}$$ | $$f'\left(x\right)=3x^{2}$$ |

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

|  |
| --- |
| $$\left(f+g\right)'=f'+g'$$ |
| $$\left(kf\right)^{'}=kf^{'} k\in R$$ |

Méthode : Calculer des fonctions dérivées

 **Vidéo** [**https://youtu.be/uTk3T\_GfwYo**](https://youtu.be/uTk3T_GfwYo)

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction $f$ :

a) $f\left(x\right)=3x$ b) $f\left(x\right)=x^{2}+5$ c)$ f\left(x\right)=5x^{3}$ d) $f\left(x\right)=3x^{2}+4x$

**Correction**

a) $f\left(x\right)=3x \rightarrow f'\left(x\right)=3$

b) $f\left(x\right)=x^{2}+5 \rightarrow f^{'}(x)=2x+0=2x$

c) $f\left(x\right)=5×x^{3} \rightarrow f'(x)=5×3x^{2}=15x^{2}$

d) $f\left(x\right)=3×x^{2}+4x \rightarrow f'\left(x\right)=3×2x+$ $4=6x+$ 4

**Partie 2 : Fonction dérivée d’une fonction polynôme**

 1) Fonction polynôme de degré 2

Soit $f$ une fonction polynôme du second degré définie par $f\left(x\right)=5x^{2}-3x+2$.

Pour déterminer la fonction dérivée $f ’$, on applique la technique suivante :

$$f\left(x\right)=5×x^{2}-3x+2$$

$$\downright $$

$$f'\left(x\right)=5×2x-3+0$$

$$=10x-3 $$

Définition : Soit $f $une fonction polynôme du second degré définie sur ℝ par

$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$.

On appelle **fonction dérivée** de $f$, notée $f ’$, la fonction définie sur ℝ par

$ f'\left(x\right)=a×2x+b$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d’une fonction polynôme du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/5WDIrv\_bEYE**](https://youtu.be/5WDIrv_bEYE)

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f\left(x\right)=4x^{2}-6x+1$ b) $g\left(x\right)=x^{2}-2x+6$ c) $h\left(x\right)=-3x^{2}+2x+8$

d) $k\left(x\right)=x^{2}+x+1$ e) $l\left(x\right)=5x^{2}+5$ f) $m\left(x\right)=-x^{2}+7x$

**Correction**

a) $f\left(x\right)=4×x^{2}-6x+1$ donc $f^{'}\left(x\right)=4×2x-6+0=8x-6$

b) $g\left(x\right)=x^{2}-2x+6$ donc $g^{'}(x)=2x-2$

c) $h\left(x\right)=-3×x^{2}+2x+8$ donc $h'\left(x\right)=\left(-3\right)×2x+2=-6x+2$

d) $k\left(x\right)=x^{2}+1x+1$ donc $k'\left(x\right)=2x+1$

e) $l\left(x\right)=5×x^{2}+5$ donc $l'\left(x\right)=5×2x=10x$

f) $m\left(x\right)=-x^{2}+7x$ donc $m'\left(x\right)=-2x+7$

 2) Fonction polynôme de degré 3

Soit *f* une fonction polynôme du troisième degré définie par :

$f\left(x\right)=2x^{3}-3x^{2}+5x-1$.

Pour déterminer la fonction dérivée $f’$, on applique la technique suivante :

$$f\left(x\right)=2×x^{3}-3×x^{2}+5x-1$$

$$\downright $$

$$f^{'}(x)=2×3x^{2}-3×2x+5-0$$

$$=6x^{2}-6x+5 $$

Définition : Soit *f* une fonction polynôme du troisième degré définie sur ℝ par

$ f\left(x\right)=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$.

On appelle **fonction dérivée** de *f*, notée *f* ’, la fonction définie sur ℝ par

$ f'\left(x\right)=a×3x^{2}+b×2x+c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d’une fonction polynôme du troisième degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1fOGueiO\_zk**](https://youtu.be/1fOGueiO_zk)

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f\left(x\right)=x^{3}-3x^{2}+2x-5$ b) $g\left(x\right)=5x^{3}+2x^{2}+2x-7$

c) $h\left(x\right)=-2x^{3}-3x^{2}-7x+8$ d) $k\left(x\right)=-x^{3}+x^{2}+1$

e) $l\left(x\right)=4x^{3}+1$ f) $m\left(x\right)=-x^{3}+7x$

**Correction**

a) $f\left(x\right)=x^{3}-3×x^{2}+2x-5$ donc $f'\left(x\right)=3x^{2}-3×2x+2=3x^{2}-6x+2$

b)$ g\left(x\right)=5×x^{3}+2×x^{2}+2x-7$

 donc $g'\left(x\right)=5×3x^{2}+2×2x+2=15x^{2}+4x+2$

c) $h\left(x\right)=-2×x^{3}-3×x^{2}-7x+8$

 donc $h^{'}(x)=\left(-2\right)×3x^{2}-3×2x-7=-6x^{2}-6x-7$

d) $k\left(x\right)=-x^{3}+x^{2}+1$ donc $k'\left(x\right)=-3x^{2}+2x$

e) $l\left(x\right)=4×x^{3}+1$ donc $l^{'}(x)=4×3x^{2}=12x^{2}$

f) $m\left(x\right)=-x^{3}+7x$ donc $m'\left(x\right)=-3x^{2}+7$

**Partie 3 : Variations d’une fonction polynôme**

Théorème :

- Si$ f'(x)\leq 0$, alors $f$ est décroissante.

- Si$ f'(x)\geq 0$, alors $f$ est croissante.

Méthode : Étudier les variations d’une fonction polynôme du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/EXTobPZzORo**](https://youtu.be/EXTobPZzORo)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zxyKLqnlMIk**](https://youtu.be/zxyKLqnlMIk)

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par$ f\left(x\right)=2x^{2}-8x+1$.

a) Calculer la fonction dérivée de $f$.

b) Déterminer le signe de $f ’$ en fonction de *x*.

c) Dresser le tableau de variations de $f$.

**Correction**

a) $f^{'}\left(x\right)=2×2x-8=4x-8$.

b) Étude du signe de la dérivée :

On commence par résoudre l’équation $f^{'}(x)=0$.

Soit : $4x-8=0$

$ 4x=8$

$ x=$ $\frac{8}{4}$ $=2$.

La fonction $f’$ est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.

Donc $f’$ est croissante. Elle est donc d’abord négative (avant $x=2$) puis positive (après $x=2$).

c) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | $-\infty $ $2$ $+\infty $ |
| $$f'(x)$$ | – |  $+$ |
| $$f(x)$$ |   $-7$ |

$ f\left(2\right)=2×2^{2}-8×2+1=-7$.

La fonction *f* admet un minimum égal à –7 en $x=2$.

Méthode : Étudier les variations d’une fonction polynôme du troisième degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Ktc-PThiP6I**](https://youtu.be/Ktc-PThiP6I)

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par $f\left(x\right)=x^{3}+\frac{9}{2}x^{2}-12x+5$.

1) a) Calculer la fonction dérivée de $f$.

 b) Démontrer que $f^{'}\left(x\right)=3\left(x+4\right)\left(x-1\right)$.

2) Déterminer le signe de $f’$ en fonction de $x$.

3) Dresser le tableau de variations de $f$.

4) À l’aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction $f$.

**Correction**

1) a) On a :

$$f^{'}\left(x\right)=3x^{2}+\frac{9}{2}×2x-12=3x^{2}+9x-12$$

 b) Développons $3\left(x+4\right)\left(x-1\right)$ :

$$3\left(x+4\right)\left(x-1\right)$$

=$\left(3x+12\right)\left(x-1\right)$

$$=3x^{2}-3x+12x-12$$

$$=3x^{2}+9x-12$$

$$=f'(x)$$

 Donc $f^{'}\left(x\right)=3\left(x+4\right)\left(x-1\right)$.

2) On commence par résoudre l'équation $f^{'}\left(x\right)=0$ :

 $3\left(x+4\right)\left(x-1\right)=0$

$x+4=0$ ou $x-1=0$

$x=-4$ $x=1$

La dérivée s’annule en $-4$ et $1$.

Comme $a=3>0$, les branches de la parabole représentant la fonction dérivée sont tournées vers le haut (position « 😊 »).

La dérivée est donc d’abord positive, puis négative, puis positive.

3) On en déduit le tableau de variations de $f$ :

|  |  |
| --- | --- |
| $$x$$ | $-\infty $ $–4$ $1$ $+\infty $ |
| $$f^{'}(x)$$ | $+$ | $-$ | $$+$$ |
| $$f(x)$$ |  $61$ – $\frac{3}{2}$ |

En effet :

$$f\left(-4\right)=\left(-4\right)^{3}+\frac{9}{2}×\left(-4\right)^{2}-12×\left(-4\right)+5=61$$

$$f\left(1\right)=1^{3}+\frac{9}{2}×1^{2}-12×1+5=-\frac{3}{2}$$



4)

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)