MATRICES – Chapitre 2/2

**Partie 1 : Écriture matricielle d'un système linéaire**

Exemple :

On considère le système (S) suivant :

On pose : , et *.*

On a alors :

Ainsi, le système peut s'écrire :

Propriété : Soit une matrice carrée inversible de taille et une matrice colonne à lignes.

Alors le système linéaire d'écriture matricielle admet une unique solution donnée par la matrice colonne .

Démonstration :

alors.

Remarque :

Dans le contexte de la propriété précédente, si n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.

Méthode : Résoudre un système à l'aide des matrices

 **Vidéo** [**https://youtu.be/vhmGn\_x7UZ4**](https://youtu.be/vhmGn_x7UZ4)

Résoudre le système (S) suivant : .

**Correction**

On a vu plus haut qu'en posant , et .

Le système peut s'écrire sous forme matricielle : .

En calculant l'inverse de la matrice , on a : .

Ainsi .

Le système a donc pour solution le couple .

**Partie 2 : Suites de matrices colonnes**

1) Exemples :

a) La suite définie pour tout entier naturel par est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les termes des suites numériques et définies pour tout entier naturel par et .

b) Soit deux suites numériques couplées et définies pour tout entier naturel par : , et

On pose pour tout entier naturel :

On pose encore : et .

On a alors et pour tout entier naturel , la relation matricielle de récurrence .

En effet :

c) Soit une suite numérique définie par une relation de récurrence d'ordre 2 :

, et .

On pose pour tout entier naturel :

On pose encore : .

On a alors et pour tout entier naturel , la relation matricielle de récurrence : .

En effet,

2) Terme général d'une suite de matrices

Propriété : Soit une suite de matrices colonnes de taille telle que pour tout entier naturel , on a où est une matrice carrée de taille .

Alors, pour tout entier naturel , on a : .

Démonstration :

On démontre cette propriété par récurrence.

* **Initialisation :**  car
* **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier tel que la propriété soit vraie :

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang :

* **Conclusion :**

La propriété est vraie pour et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel , soit : .

Méthode : Calculer des termes d'une suite à l'aide de matrices

 **Vidéo** [**https://youtu.be/62U34Kl4o1I**](https://youtu.be/62U34Kl4o1I)

Soit deux suites numériques couplées et définies pour tout entier naturel par : , et

Calculer et .

**Correction**

On pose pour tout entier naturel :

On pose encore : .

On a alors et pour tout entier naturel , la relation matricielle de récurrence : .

On alors et donc en particulier .

Soit en s'aidant de la calculatrice :

On en déduit que et .

3) Convergence de suites de matrices colonnes

Définitions : On dit qu'une suite de matrices colonnes de taille est **convergente** si les suites dont les termes sont les coefficients de sont convergentes.

La **limite** de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les limites obtenues.

Dans tous les autres cas, on dit que la suite est **divergente**.

Exemples :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/dbP7R-9Q2\_s**](https://youtu.be/dbP7R-9Q2_s)

a) La suite définie pour tout entier naturel par est divergente car et .

b) La suite définie pour tout entier naturel *n* non nul par est convergente et sa limite est la matrice colonne .

Propriété : est une suite de matrices colonnes de taille définie par la relation matricielle de récurrence où est une matrice carrée de taille et est une matrice colonne à lignes.

Si la suite est convergente alors sa limite est une matrice colonne vérifiant l'égalité .

Démonstration :

et . Par unicité des limites, on a .

Méthode : Recherche d'une suite constante de matrices vérifiant une relation de récurrence

 **Vidéo** [**https://youtu.be/C-2-1yf-O4A**](https://youtu.be/C-2-1yf-O4A)

Soit une suite de matrices colonnes définie pour tout entier naturel par avec et .

Rechercher, si elle existe, la suite constante.

**Correction**

Résolvons l'équation matricielle .

Soit soit encore

Et donc .

A l'aide la calculatrice, on obtient :

Et donc :

La suite constante cherchée est donc :



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)