MATRICES – Chapitre 2/2

**Partie 1 : Écriture matricielle d'un système linéaire**

Exemple :

On considère le système (S) suivant : $\left\{\begin{array}{c}5x+2y=16\\4x+3y=17\end{array}\right.$

On pose : $A=\left(\begin{matrix}5&2\\4&3\end{matrix}\right)$, $X=\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $B=\left(\begin{matrix}16\\17\end{matrix}\right)$*.*

On a alors : $A×X=\left(\begin{matrix}5x+2y\\4x+3y\end{matrix}\right)$

Ainsi, le système peut s'écrire :$ A×X=B$

Propriété : Soit $A$ une matrice carrée inversible de taille $n$ et $B$ une matrice colonne à $n$ lignes.

Alors le système linéaire d'écriture matricielle $A×X=B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $A^{-1}B$.

Démonstration :

$A×X=B$ alors$ X=A^{-1}B$.

Remarque :

Dans le contexte de la propriété précédente, si $A$ n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.

Méthode : Résoudre un système à l'aide des matrices

 **Vidéo** [**https://youtu.be/vhmGn\_x7UZ4**](https://youtu.be/vhmGn_x7UZ4)

Résoudre le système (S) suivant : $\left\{\begin{array}{c}5x+2y=16\\4x+3y=17\end{array}\right.$.

**Correction**

On a vu plus haut qu'en posant $A=\left(\begin{matrix}5&2\\4&3\end{matrix}\right)$, $X=\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ et $B=\left(\begin{matrix}16\\17\end{matrix}\right)$.

Le système peut s'écrire sous forme matricielle : $A×X=B$.

En calculant l'inverse de la matrice $A$, on a : $A^{-1}=\left(\begin{matrix}\frac{3}{7}&\frac{-2}{7}\\\frac{-4}{7}&\frac{5}{7}\end{matrix}\right)$.

Ainsi $X=A^{-1}B=\left(\begin{matrix}\frac{3}{7}&\frac{-2}{7}\\\frac{-4}{7}&\frac{5}{7}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}16\\17\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right)$.

Le système a donc pour solution le couple $(x ;y)=(2 ;3)$.

**Partie 2 : Suites de matrices colonnes**

1) Exemples :

a) La suite $\left(U\_{n}\right)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $U\_{n}=\left(\begin{matrix}n^{2}\\3n+1\end{matrix}\right)$ est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les termes des suites numériques $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ définies pour tout entier naturel $n$ par $u\_{n}=n^{2}$ et $v\_{n}=3n+1$.

b) Soit deux suites numériques couplées $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ définies pour tout entier naturel $n$ par : $u\_{0}=2$, $v\_{0}=4$ et $\left\{\begin{array}{c}u\_{n+1}=2u\_{n}-3v\_{n}+1\\v\_{n+1}=-u\_{n}+5v\_{n}-4\end{array}\right.$

On pose pour tout entier naturel $n$ : $U\_{n}=\left(\begin{matrix}u\_{n}\\v\_{n}\end{matrix}\right)$

On pose encore : $A=\left(\begin{matrix}2&-3\\-1&5\end{matrix}\right)$ et $ B=\left(\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right)$.

On a alors $U\_{0}=\left(\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right)$ et pour tout entier naturel $n$, la relation matricielle de récurrence $U\_{n+1}=AU\_{n}+B$.

En effet :

$$AU\_{n}+B=\left(\begin{matrix}2&-3\\-1&5\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}u\_{n}\\v\_{n}\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}2u\_{n}-3v\_{n}+1\\-u\_{n}+5v\_{n}-4\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}u\_{n+1}\\v\_{n+1}\end{matrix}\right)=U\_{n+1}$$

c) Soit une suite numérique $\left(u\_{n}\right)$ définie par une relation de récurrence d'ordre 2 :

$u\_{0}=2$, $u\_{1}=-1$ et $u\_{n+2}=2u\_{n+1}+3u\_{n}$.

On pose pour tout entier naturel $n$ : $U\_{n}=\left(\begin{matrix}u\_{n}\\u\_{n+1}\end{matrix}\right)$

On pose encore : $A=\left(\begin{matrix}0&1\\3&2\end{matrix}\right)$.

On a alors $U\_{0}=\left(\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right)$ et pour tout entier naturel $n$, la relation matricielle de récurrence : $U\_{n+1}=AU\_{n}$.

En effet, $AU\_{n}=\left(\begin{matrix}0&1\\3&2\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}u\_{n}\\u\_{n+1}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}u\_{n+1}\\3u\_{n}+2u\_{n+1}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}u\_{n+1}\\u\_{n+2}\end{matrix}\right)=U\_{n+1}$

 2) Terme général d'une suite de matrices

Propriété : Soit une suite de matrices colonnes $\left(U\_{n}\right)$ de taille $p$ telle que pour tout entier naturel $n$, on a $U\_{n+1}=AU\_{n}$ où $A$ est une matrice carrée de taille $p$.

Alors, pour tout entier naturel $n$, on a : $U\_{n}=A^{n}U\_{0}$.

Démonstration :

On démontre cette propriété par récurrence.

* **Initialisation :** $U\_{0}=A^{0}U\_{0}$ car $A^{0}=I\_{p}$
* **Hérédité :**

 - Hypothèse de récurrence :

 Supposons qu'il existe un entier $k$ tel que la propriété soit vraie : $U\_{k}=A^{k}U\_{0}$

 - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$ : $U\_{k+1}=A^{k+1}U\_{0}$

$$U\_{k+1}=AU\_{k}=A\left(A^{k}U\_{0}\right)=(AA^{k})U\_{0}=A^{k+1}U\_{0}$$

* **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n$, soit : $U\_{n}=A^{n}U\_{0}$.

Méthode : Calculer des termes d'une suite à l'aide de matrices

 **Vidéo** [**https://youtu.be/62U34Kl4o1I**](https://youtu.be/62U34Kl4o1I)

Soit deux suites numériques couplées $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ définies pour tout entier naturel $n$ par : $u\_{0}=1$, $v\_{0}=-1$ et $\left\{\begin{array}{c}u\_{n+1}=3u\_{n}-v\_{n} \\v\_{n+1}=-2u\_{n}+2v\_{n}\end{array}\right.$

Calculer $u\_{6}$ et $v\_{6}$.

**Correction**

On pose pour tout entier naturel $n$ : $U\_{n}=\left(\begin{array}{c}u\_{n}\\v\_{n}\end{array}\right)$

On pose encore : $A=\left(\begin{matrix}3&-1\\-2&2\end{matrix}\right)$.

On a alors $U\_{0}=\left(\begin{array}{c}1\\-1\end{array}\right)$ et pour tout entier naturel $n$, la relation matricielle de récurrence : $U\_{n+1}=AU\_{n}$.

On alors $U\_{n}=A^{n}U\_{0}$ et donc en particulier $U\_{6}=A^{6}U\_{0}$.

Soit en s'aidant de la calculatrice :

$$U\_{6}=\left(\begin{matrix}3&-1\\-2&2\end{matrix}\right)^{6}×\left(\begin{array}{c}1\\-1\end{array}\right)=\left(\begin{matrix}2 731&-1 365\\-2 730&1 366\end{matrix}\right)\left(\begin{array}{c}1\\-1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}4 096\\-4 096\end{array}\right)$$

On en déduit que $u\_{6}=4 096$ et $v\_{6}=-4 096$.

3) Convergence de suites de matrices colonnes

Définitions : On dit qu'une suite de matrices colonnes $\left(U\_{n}\right)$ de taille $p$ est **convergente** si les $p$ suites dont les termes sont les $p$ coefficients de $\left(U\_{n}\right)$ sont convergentes.

La **limite** de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les $p$ limites obtenues.

Dans tous les autres cas, on dit que la suite est **divergente**.

Exemples :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/dbP7R-9Q2\_s**](https://youtu.be/dbP7R-9Q2_s)

a) La suite $\left(U\_{n}\right)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $U\_{n}=\left(\begin{array}{c}n^{2}\\3n+1\end{array}\right)$ est divergente car $\lim\_{n\to \infty }n^{2}=+\infty $ et $\lim\_{n\to \infty }3n+1=+\infty $.

b) La suite $\left(U\_{n}\right)$ définie pour tout entier naturel *n* non nul par $U\_{n}=\left(\begin{array}{c}\frac{1}{n}\\\frac{n^{2}+2}{n^{2}+1}\end{array}\right)$ est convergente et sa limite est la matrice colonne $U=\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)$.

Propriété : $\left(U\_{n}\right)$ est une suite de matrices colonnes de taille $p$ définie par la relation matricielle de récurrence $U\_{n+1}=AU\_{n}+B$ où $A$ est une matrice carrée de taille $p$ et $B$ est une matrice colonne à $p$ lignes.

Si la suite $\left(U\_{n}\right)$ est convergente alors sa limite $U$ est une matrice colonne vérifiant l'égalité $U=AU+B$.

Démonstration :

$\lim\_{n\to +\infty }U\_{n+1}=U$ et $\lim\_{n\to +\infty }AU\_{n}+B=AU+B$. Par unicité des limites, on a $U=AU+B$.

Méthode : Recherche d'une suite constante de matrices vérifiant une relation de récurrence

 **Vidéo** [**https://youtu.be/C-2-1yf-O4A**](https://youtu.be/C-2-1yf-O4A)

Soit une suite $\left(U\_{n}\right)$ de matrices colonnes définie pour tout entier naturel $n$ par $U\_{n+1}=AU\_{n}+B$ avec $A=\left(\begin{matrix}2&0,5\\3&-2\end{matrix}\right)$ et $B=\left(\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right)$.

Rechercher, si elle existe, la suite $\left(U\_{n}\right)$ constante.

**Correction**

Résolvons l'équation matricielle $U=AU+B$.

Soit $U-AU=B$ soit encore $\left(I\_{2}-A\right)U=B$

Et donc $U=\left(I\_{2}-A\right)^{-1}B$.

$$I\_{2}-A=\left(\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}2&0,5\\3&-2\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-1&-0,5\\-3&3\end{matrix}\right)$$

A l'aide la calculatrice, on obtient :

$$\left(I\_{2}-A\right)^{-1}=\left(\begin{matrix}-1&-0,5\\-3&3\end{matrix}\right)^{-1}=\left(\begin{matrix}\frac{-2}{3}&\frac{-1}{9}\\\frac{-2}{3}&\frac{2}{9}\end{matrix}\right)$$

Et donc :

$$U=\left(I\_{2}-A\right)^{-1}B=\left(\begin{matrix}\frac{-2}{3}&\frac{-1}{9}\\\frac{-2}{3}&\frac{2}{9}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{-13}{9}\\\frac{-10}{9}\end{matrix}\right)$$

La suite $\left(U\_{n}\right)$ constante cherchée est donc :

$$\left(U\_{n}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{-13}{9}\\\frac{-10}{9}\end{matrix}\right)$$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)