GRAPHES – Chapitre 2/2

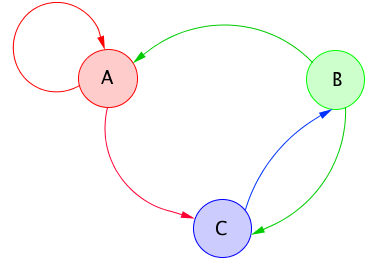
**Partie 1 : Graphes orientés et graphes pondérés**

1) Graphes orientés

Définitions : - Un graphe est **orienté** si ses arêtes, appelées **arcs** dans ce cas, ont un sens de parcours.

- Un **chemin** est une succession d'arcs mis bout à bout.

- Un **circuit** est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.



Exemple :

Le graphe orienté ci-contre est d'ordre 3 car il possède 3 sommets.

Il possède une boucle sur le sommet A.

A – C – B est un chemin de longueur 2.

B – C – B – A – A – C – B est un chemin fermé de longueur 6.

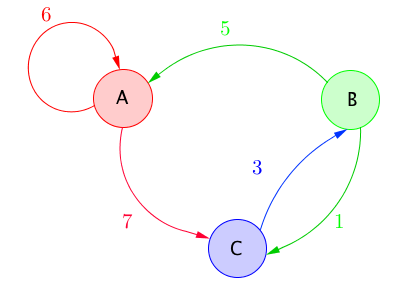
A – C – B – A est un circuit de longueur 3.

2) Graphes pondérés

Définitions : - Un graphe est **étiqueté** si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectées d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, …)

- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit **pondéré**. Les étiquettes sont appelées les **poids** entre les sommets.

- Le poids d’une chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).



Exemple :

Le graphe orienté ci-contre est pondéré.

Le poids entre le sommet B et le sommet A est égal à 5.

Le poids du chemin B – C – B – A est égal à :

1 + 3 + 5 = 9

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4**](https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4)

Remarque :

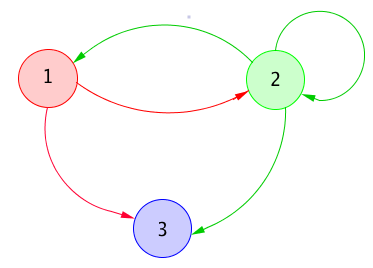
Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

3) Matrice d’adjacence associée à un graphe orienté

Définition : Soit un graphe orienté d'ordre dont les sommets sont numérotés de 1

à .

La **matrice d'adjacence** associée à est la matrice carrée de taille dont chaque terme est égal au nombre d'arcs orientés reliant le sommet vers le sommet .

Exemple :

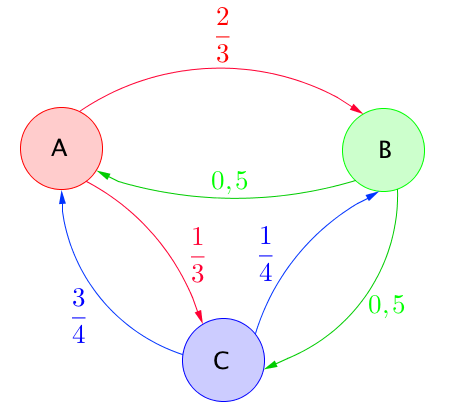
 **Vidéo** [**https://youtu.be/yRBCx3uxN9A**](https://youtu.be/yRBCx3uxN9A)

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :

**Partie 2 : Chaîne de Markov**

1) Définition

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants , et .

Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont , ou (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).

Par exemple, la probabilité que l'attaquant passe le ballon à l'attaquant est égale à .

Les poids des arcs sont alors des probabilités.

Un tel schéma est appelé un **graphe probabiliste**.

Définition : Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Par exemple, la somme des poids des arcs issus de est égale à : .

2) Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire prenant les valeurs , ou à l'étape .

, ou s'appelle les **états** de .

Par exemple, signifie que l'attaquant possède le ballon après la 3e passe.

La suite de variables aléatoires est appelée **marche aléatoire** ou **chaîne de Markov** sur l'ensemble des issues .

Dans une chaîne de Markov, l'état du processus à l'étape ne dépend que de celui à l'état , mais non de ses états antérieurs. Ainsi, la probabilité que l'attaquant possède le ballon ne dépend que de la position précédente du ballon (en ou en ) mais non de ses positions antérieures.

3) Probabilité de transition

On considère la loi de probabilité de , appelée **probabilité de transition**, qui donne la probabilité qu'un attaquant possède le ballon à l'étape (-ième passe).

On note par exemple  : la probabilité que le ballon se trouve chez l'attaquant après la (-ième passe sachant que c'est l'attaquant qui envoie le ballon. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.

Cette probabilité ne dépend pas de .

4) Matrice de transition

Définition : La **matrice de transition** d'une chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre dont le coefficient situé sur la ligne et la colonne est la probabilité de transition portée par l'arc reliant le sommet vers le sommet s'il existe et 0 dans le cas contraire.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/KRi0C\_zOsHs**](https://youtu.be/KRi0C_zOsHs)

Dans l'exemple, la matrice de transition est :

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant *B* alors qu'il se trouvait chez l'attaquant *A*.

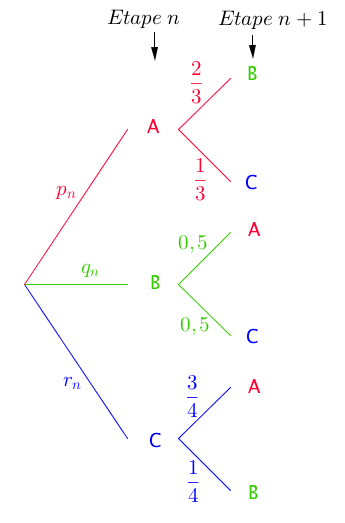
Remarques :

- Le coefficient de la matrice est nul car la probabilité que l'attaquant *A* garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients et .

- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

Définition : L'**état probabiliste après étapes** de la chaîne de Markov est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après étapes.

Exemple : Dans l'exemple des passeurs au football, la matrice ligne des états après la 3e étape donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant *A*, chez l'attaquant *B* et chez l'attaquant *C* après 3 passes.

L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de transition de l'étape à l'étape .

On note , et les probabilités que le ballon se trouve respectivement chez l’attaquant , chez le et chez le après la -ième passe.

A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

On note la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après étapes.

On a alors : .

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition et dont la matrice ligne des états à l'étape est .

Pour tout entier naturel , on a : et où est l'état initial.

Démonstration au programme :

* On note :

- la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après étapes.

- , et les états de .

selon la formule des probabilités totales.

Soit : .

On reconnait le premier coefficient du produit

On prouve de même que et sont respectivement le deuxième et troisième coefficient du produit

* La démonstration de l’expression explicite est semblable à celle faites dans le cadre des suites numériques.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gxrgpotHfnE**](https://youtu.be/gxrgpotHfnE)

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant possède le ballon à l'étape 0.

La matrice ligne des états après la 3e étape est égale à :.

On a : car le ballon part de .

Avec la calculatrice, on obtient :

Donc :

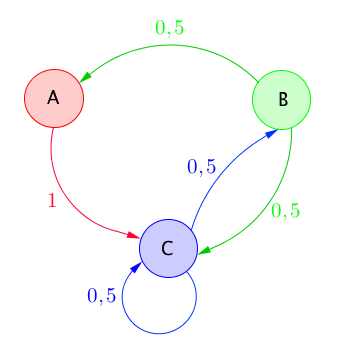
Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant possède le ballon après la 3e passe est égale à .

**Partie 3 : Distribution invariante d'une chaîne de Markov**

1) Chaîne de Markov convergente

Définition : On dit qu'une **chaîne de Markov de matrice de transition est convergente** si la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov converge.

Définition : Si la suite des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie alors la limite de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation .



Méthode : Étudier une distribution invariante d'une

chaîne de Markov à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-contre où l'on part de .

A l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette chaîne de Markov. On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).

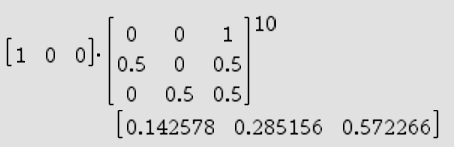
**Correction**

La matrice de transition est .

Pour tout entier naturel , on a : où est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.

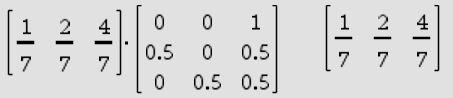
On a donc : avec car on part de *A*.

A l'aide de la calculatrice, calculons par exemple :



On peut effectuer les calculs pour des puissances de de plus en plus grandes. On constate que l'état stable semble être la matrice ligne :

L'état stable *P* vérifie l'équation , en effet :



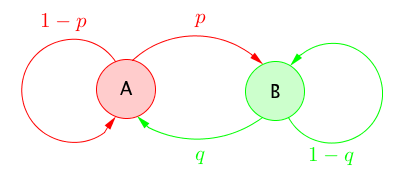
Remarque :

Cette méthode ne prouve pas que la chaîne de Markov est convergente.

En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.

2) Cas d'un graphe à deux sommets

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition sur un graphe à deux sommets où et :



Alors on a : Et la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov converge vers un état stable tel que .

ne dépend pas de l'état initial .

Démonstration :

Pour tout entier naturel *n*, on note avec .

Comme , on a :

Pour tout entier naturel , on pose : et on a :

est donc une suite géométrique de raison .

Comme , on a et donc converge vers 0.

D'où converge vers .

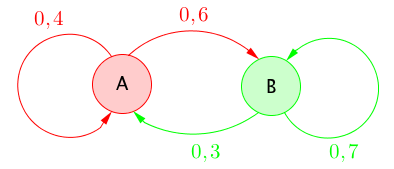
Comme , converge vers .

Les limites de et ne dépendent donc pas de l'état initial.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov sur un graphe à deux sommets

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PS756B-M0Dw**](https://youtu.be/PS756B-M0Dw)

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-dessous. On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).



Étudier la convergence de la chaîne de Markov.

**Correction**

La matrice de transition est .

Pour tout entier naturel , on a : où est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.

L'état stable vérifie l'équation , soit :

Ainsi, on a le système :

Comme , on a et donc et donc .

L'état stable du graphe est donc :

Cela signifie que, quel que soit l'état initial (départ de ou de ), les probabilités d'être en et en tendent respectivement vers et .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)