GRAPHES – Chapitre 1/2



**Partie 1 : Le vocabulaire des graphes**

Exemple :

Le schéma suivant s'appelle un **graphe**.

Il possède 4 **sommets** ; on dit qu'il est d'**ordre** 4.

Les sommets A et C sont **adjacents** car ils sont reliés

par une arête.

Le sommet C est de **degré** 3 car 3 arêtes partent de C.

Le sommet A possède une boucle.

Définitions : - On appelle **graphe non orienté** un ensemble de points, appelés **sommets**, reliés par des lignes, appelées **arêtes**.

- L'**ordre du graphe** est le nombre de sommets.

- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.

- Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.

- Une **boucle** est une arête dont les extrémités ont le même sommet.



Exemple :

La carte ci-contre représente le réseau de tramway de la ville de Strasbourg.

Il s'agit d'un graphe dont les sommets sont les stations.

Définition : Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques sont adjacents.



Exemple :

Le réseau d'ordinateur représenté ci-contre est un graphe complet en effet tous les sommets sont reliés deux à deux.

Définition : Un graphe est dit **simple** s’il ne possède ni boucle, ni arête multiple\*.

\* S’il y a plusieurs arêtes entre deux sommets, on parle d’arêtes multiples.

Propriété : La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

Démonstration : Chaque arête est comptée exactement deux fois lorsqu'on fait la somme des degrés, une fois pour chaque sommet.

Méthode : Appliquer la propriété de la somme des degrés

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gznmzmzjBsQ**](https://youtu.be/gznmzmzjBsQ)

a) Un hectogone est un polygone à 100 côtés. Avec toutes ses diagonales, l'hectogone forme un graphe.

Combien la figure possède-t-elle de segments ?

b) Cinq jeunes souhaitent organiser un tournoi de ping-pong où chaque joueur rencontre trois autres joueurs.

Est-ce possible ?

**Correction**

a) En chaque sommet, le graphe possède 99 arêtes. Le graphe possède 100 sommets donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 99 x 100 = 9 900.

D'après la propriété de la somme des degrés, le graphe possède 9 900 : 2 = 4 950 arêtes (ou segments si l'on considère la figure géométrique).

b) L'organisation du tournoi peut se représenter par un graphe d'ordre 5 où chaque sommet possède 3 arêtes.

La somme des degrés est égale à 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15. Donc d'après la propriété de la somme des degrés, le graphe possède 15 : 2 = 7,5 arêtes. Ce qui est impossible donc la situation du tournoi n'est pas réalisable.

Définitions : - Dans un graphe non orienté, une **chaîne** est une succession d'arêtes mises bout à bout.

- La **longueur de la chaîne** est le nombre d'arêtes qui la composent.

- On dit qu'une chaîne est **fermée** si ses extrémités coïncident.

- Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.



Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/88D9yWJAYYk**](https://youtu.be/88D9yWJAYYk)

Dans le graphe ci-contre,

* A – B – C – D – E est une chaîne de longueur 4.
* A – B – E – D – B – A est une chaîne fermée de longueur 5.
* B – C – D – E – B est un cycle de longueur 4.

Définition : Un graphe $G$ est **connexe** si chaque couple de sommets est relié par une chaîne.

Exemples :

Graphe connexe Graphe non connexe, les sommets C et E, par exemple, ne peuvent être reliés.

**Partie 2 : Matrice d’adjacence associée à un graphe**

Définition : Soit un graphe $G$ non orienté d'ordre $n$ dont les sommets sont numérotés de 1 à $n$.

La **matrice d'adjacence** associée à $G$ est la matrice carrée de taille $n$ dont chaque terme $a\_{ij}$ est égal au nombre d’arêtes reliant les sommets $i$ et $j$.



Exemples :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/JMBCVKiVsic**](https://youtu.be/JMBCVKiVsic)

a) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre

est :

 $A=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{matrix} \begin{matrix}0&0\\1&1\\1&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&1\\0&1\end{matrix} \begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\end{matrix}\end{array}\right)$

Par exemple, le coefficient $a\_{14}$ marqué en rouge est égal à 0 car aucune arête ne relie les sommets 1 et 4.

Le coefficient $a\_{42}$ marqué en vert est égal à 1 car une arête relie les sommets 4 et 2.

On constate que la diagonale est formée de 0 car aucun sommet n'est relié avec lui-même.

On constate également que la matrice est symétrique par rapport à la diagonale car $a\_{ij}=a\_{ji}$.

b) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-dessous est $B=\left(\begin{matrix}1&2\\2&0\end{matrix}\right)$



Propriété : Soit une matrice d'adjacence $A$ d'un graphe $G$ non orienté d'ordre $p$ dont les sommets sont numérotés de 1 à $p$.

Le nombre de chaînes de longueur $n$ reliant le sommet $i$ au sommet $j$ est égal au coefficient $a\_{ij}$ de la matrice $A^{n}$,$n\in N^{\*}$.

Démonstration au programme :

On démontre cette propriété par récurrence.

* **Initialisation :** Les chaînes de longueur 1 qui joignent le sommet $i$ au sommet $j$ correspondent directement au coefficient $\left(a\_{1}\right)\_{ij}$ de la matrice d'adjacence $A=A^{1}$.
* **Hérédité :**

 - Hypothèse de récurrence :

 Supposons qu'il existe un entier $k$ tel que la propriété soit vraie :

Le nombre de chaînes de longueur $k$ reliant le sommet $i$ au sommet $j$ est égal au coefficient $\left(a\_{k}\right)\_{ij}$ de la matrice d'adjacence $A^{k}$.

 - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$ :

Le nombre de chaînes de longueur $k+1$ reliant le sommet $i$ au sommet $j$ est égal au coefficient $\left(a\_{k+1}\right)\_{ij}$ de la matrice d'adjacence $A^{k+1}$.

Soit un troisième sommet $l$ quelconque.

Le nombre de chaînes de longueur $k+1$ allant de $i$ à $j$, tels que la première arête soit $\left\{i ;l\right\}$ correspond au nombre de chaînes de longueur 1 allant de $i$ à $l$ multiplié par le nombre de chaînes de longueur $k$ allant de $l$ à $j$, soit :

$c\_{l}= $(coefficient $\left(a\_{1}\right)\_{il}$ de la matrice $A)×$ (coefficient $\left(a\_{k}\right)\_{lj}$ de la matrice $A^{k})$

Ainsi, le nombre de chaînes de longueur $k+1$ qui joignent deux sommets $i$ à $j$ est égal à la somme des termes $c\_{l}$ pour tous les sommets $l$, soit le coefficient $\left(a\_{k+1}\right)\_{ij}$ de la matrice $A^{k+1}.$

* **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n$.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/FzqGLJ80jLw**](https://youtu.be/FzqGLJ80jLw)

On reprend l'exemple a) précédent.

On cherche le nombre de chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.

A l'aide de la calculatrice, on calcule la matrice $A^{4}$.

$$A^{4}=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{matrix} \begin{matrix}0&0\\1&1\\1&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&1\\0&1\end{matrix} \begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\end{matrix}\end{array}\right)^{4}=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}11&13&11\\13&26&19\\11&19&19\end{matrix} \begin{matrix}14&9\\19&13\\14&14\end{matrix}\\\begin{matrix}14&19\\9&13\end{matrix} \begin{matrix}14&19&11\\14&11&11\end{matrix}\end{array}\right)$$

Le nombre de chaînes de longueur 4 reliant le sommet 1 au sommet 3 est égal au coefficient $a\_{13}$ ou $a\_{31}$ de la matrice $A^{4}$.

Ainsi, il existe 11 chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.

Par exemple : 1 – 2 – 5 – 4 – 3 ou encore 1 – 2 – 3 – 2 – 3.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)