

VARIABLES ALÉATOIRES – Chapitre 1/2

▶ Tout le cours sur la loi binomiale en vidéo : <https://youtu.be/xMmfPUoBTtM>

Partie 1 : Espérance d'une variable aléatoire

Définition : L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i)$$

L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Méthode : Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

▶ Vidéo <https://youtu.be/AcWVxHgtWp4>

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

Correction

a) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne $5(\text{roi}) + 2(\text{cœur}) = 7$ €.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$.

$$P(X = 2) = \frac{7}{32}.$$

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$.

$$P(X = 5) = \frac{3}{32}.$$

- Si la carte tirée est le roi de cœur, $X = 7$.

$$P(X = 7) = \frac{1}{32}.$$

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = -1$.

$$P(X = -1) = \frac{21}{32}.$$

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

b)

$$E(X) = (-1) \times \frac{21}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 7 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{32}$$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,50$ signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 0,50 €.

Partie 2 : Schéma de Bernoulli, loi binomiale

1) Épreuve de Bernoulli

Exemples :

1) Le jeu du pile ou face : On considère comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". La probabilité d'un succès est égale à $p = \frac{1}{2}$.

2) On lance un dé et on considère comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". La probabilité d'un succès est égale à $p = \frac{1}{6}$.

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" et "échec".

2) Schéma de Bernoulli

Exemple : La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

Définition : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p .

3) Loi binomiale

Si dans un schéma de Bernoulli, on répète la même expérience n fois, alors il est possible d'obtenir 0 succès, 1 succès, 2 succès, ... ou n succès.

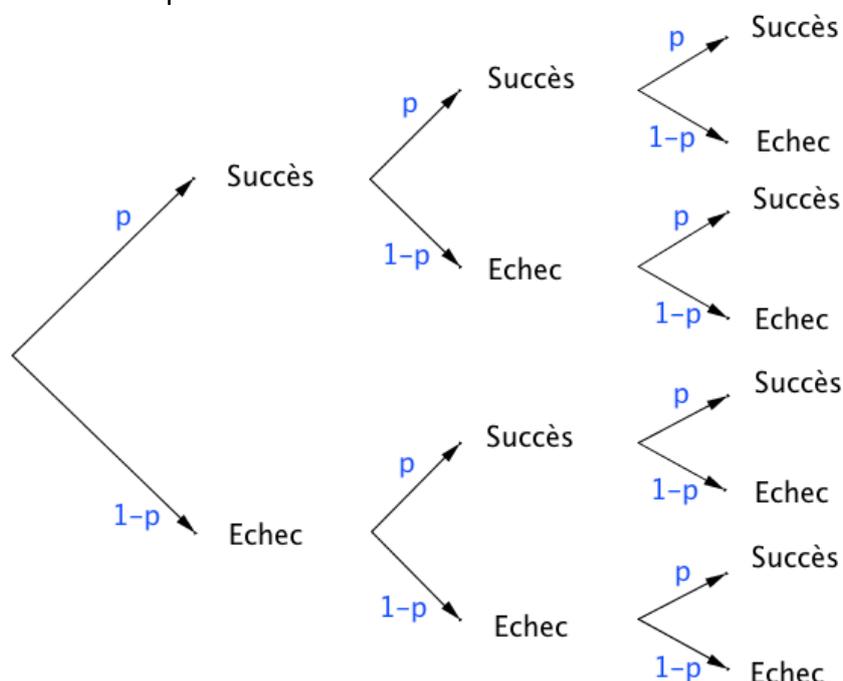
Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Une **loi binomiale** est une loi de probabilité qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque : n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n ; p)$.

Exemple :

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p .

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

- $P(X = 3) = p^3$.

En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de $p \times p \times p = p^3$.

- $X = 2$ correspond aux issues suivantes :

(Succès ; Succès ; Échec)

(Succès ; Échec ; Succès)

(Échec ; Succès ; Succès)

Donc $P(X = 2) = 3 p^2 (1 - p)$

En effet, les branches qui correspondent à 2 succès et 1 échec, donnent une probabilité de :

$p \times p \times (1 - p) = p^2 (1 - p)$.

Il y a 3 branches de ce type, soit : $3 \times p^2 (1 - p)$

Méthode : Calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide d'un arbre

▶ Vidéo https://youtu.be/b18_r8r4K2s

On tire trois fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 4 cartes qui contient une carte *Némo*. On considère comme succès l'événement « Obtenir la carte *Némo*. »

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

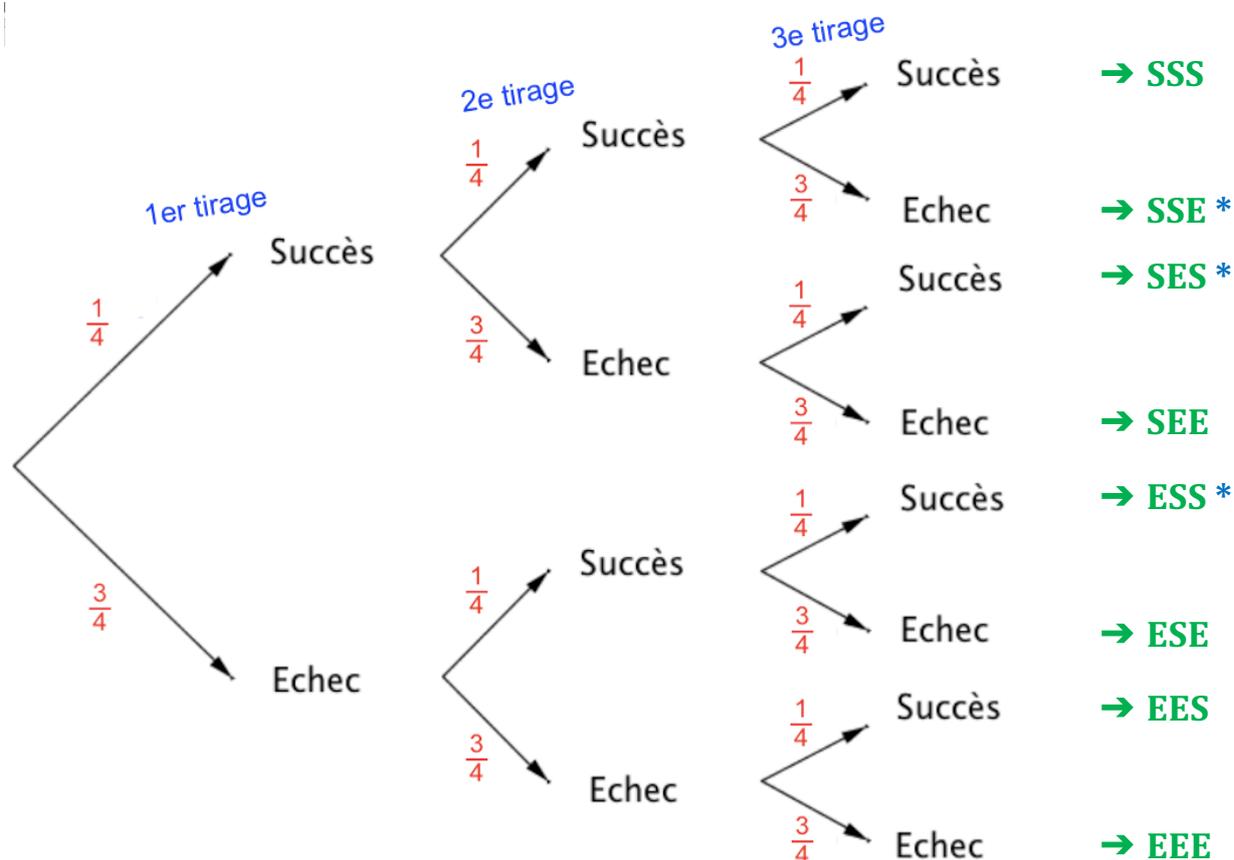
Calculer $P(X = 2)$. Interpréter le résultat.



Correction

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$.

On représente dans un arbre de probabilité les issues de l'expérience composée de 3 tirages.



À l'issue du chemin, on comptabilise les succès et les échecs ↑

On cherche à calculer $P(X = 2)$, on repère donc les chemins présentant deux succès (*). On en compte 3.

Chacun de ces chemins correspond au calcul de probabilité : $\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$\begin{aligned} \text{Et donc : } P(X = 2) &= 3 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{9}{64} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir deux fois la carte *Némo* sur 3 tirages est égale à $\frac{9}{64}$.

4) Avec la calculatrice ou un tableur

Méthode : Utiliser une loi binomiale

▶ Vidéo <https://youtu.be/7k4ZYdfWEY8> - Tuto TI

▶ Vidéo <https://youtu.be/69IQJ7lyww> - Tuto Casio

▶ Vidéo <https://youtu.be/clrAMXKrPV4> - Tuto HP

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

- Quelle est la loi suivie par X ?
- Calculer la probabilité $P(X = 5)$.
- Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$.
- Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$.

Correction

a) On répète **7 fois** une expérience à deux issues : {3 ; 4 ; 5 ; 6} et {1 ; 2}.

Le **succès** est d'obtenir {3 ; 4 ; 5 ; 6}.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres : $n = 7$ et $p = \frac{2}{3}$.

b) Avec Texas Instruments :

Touche « 2nd » et « VAR » puis choisir « binomFdp ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé : `binomFdp(7,2/3,5)`

Avec Casio :

Touche « OPTN » puis choisir « STAT », « DIST », « BINM » et « Bpd ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé : `BinominalePD(5,7,2/3)`

Avec le tableur :

Saisir dans une cellule : `=LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;0)`

On trouve $P(X = 5) \approx 0,31$.

La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

c) Avec Texas Instruments :

Touche « 2nd » et « VAR » puis choisir « binomFRép ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé : `binomFRép(7,2/3,5)`

Avec Casio :

Touche « OPTN » puis choisir « STAT », « DIST », « BINM » et « Bcd ».

Et saisir les paramètres de l'énoncé : `BinominaleCD(5,7,2/3)`

Avec le tableur :

Saisir dans une cellule :

`=LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)`On trouve $P(X \leq 5) \approx 0,74$.

La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

$$\begin{aligned} \text{d) } P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &\approx 1 - 0,045 \text{ (à l'aide de la calculatrice ou du tableur)} \\ &\approx 0,955. \end{aligned}$$

5) Représentation graphiqueMéthode : Établir une loi binomiale avec une calculatrice ou un tableur

▶ Vidéo <https://youtu.be/8f-cfVFHlxg> - Tuto TI

▶ Vidéo <https://youtu.be/I9OoHVRpM8U> - Tuto Casio

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,4$. Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

Correction

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant $P(X = k)$ pour k entier, $0 \leq k \leq 5$.

Avec Texas Instruments :Touche « $Y=$ » et saisir comme expliqué plus haut :

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=binomFde(5,0.4,X)
```

Afficher la table : Touches « 2^{nd} » et « **GRAPH** » :

X	Y1
0	.07776
1	.2592
2	.3456
3	.2304
4	.0768
5	.01024
6	0

X=0

Avec Casio :Dans « **MENU** », choisir « **TABLE** » ;

Saisir comme expliqué plus haut :

```
Table Func :Y=
Y1:BinomialPD(X,5,0.4)
```

Afficher la table : Touche « **TABL** » :

X	YI
0	0.0777
1	0.2592
2	0.3456
3	0.2304

Avec le tableur :

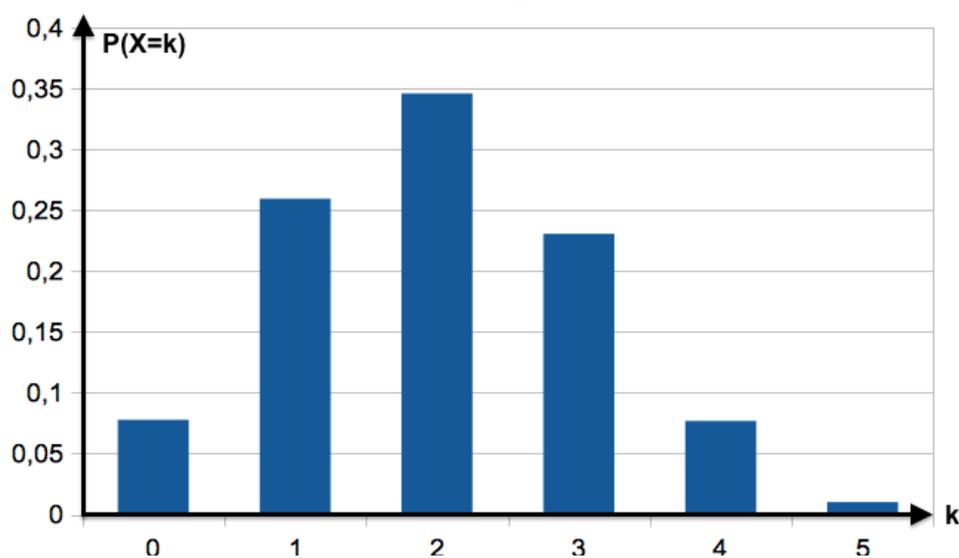
Saisir dans la cellule B1 :

=LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

Et copier cette formule vers le bas.

	A	B	C	D
1	0	0,07776		
2	1	0,2592		
3	2	0,3456		
4	3	0,2304		
5	4	0,0768		
6	5	0,01024		

On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons :



6) Espérance de la loi binomiale

Propriété : Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

On a : $E(X) = n \times p$

Exemple :

On lance 5 fois un dé à six faces.

On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.

On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès.

On a donc : $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $n = 5$.

Ainsi :

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1,7$$

On peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi binomiale

 Vidéo <https://youtu.be/95t19fznDOU>

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte.

Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.

On répond au hasard à chaque question. Quelle note peut-on espérer obtenir ?

Correction

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.

Le succès est donc « obtenir une bonne réponse ».

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{3}$.

$$E(X) = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

On peut espérer obtenir $\frac{8}{3}$ bonnes réponses en répondant au hasard.

On peut donc espérer obtenir comme note $\frac{8}{3} \times 0,5 = \frac{4}{3} \approx 1,33$ point sur 4 en répondant au hasard.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales