VARIABLES ALÉATOIRES – Chapitre 1/2

 **Tout le cours sur la loi binomiale en vidéo :** [**https://youtu.be/xMmfPUoBTtM**](https://youtu.be/xMmfPUoBTtM)

**Partie 1 : Espérance d’une variable aléatoire**

Définition : L'**espérance mathématique** de $X$ est :

 $E(X) =$ $x\_{1}×P\left(X=x\_{1}\right)+x\_{2}×P\left(X=x\_{2}\right)+…+$ $x\_{n}×P(X=x\_{n})$

$$ =\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}×P(X=x\_{i})$$

L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Méthode : Calculer l’espérance d’une variable aléatoire

** Vidéo** [**https://youtu.be/AcWVxHgtWp4**](https://youtu.be/AcWVxHgtWp4)

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

* Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
* Si on tire un roi, on gagne 5 €.
* Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l’espérance de X et interpréter le résultat.

**Correction**

a) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, –1 mais aussi 7.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7 €.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 2.

P(X = 2) = $\frac{7}{32}$.

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 5.

P(X = 5) = $\frac{3}{32}$.

- Si la carte tirée est le roi de cœur, X = 7.

P(X = 7) = $\frac{1}{32}$.

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, X = –1.

P(X = –1) = $\frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de $X$ est :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | –1 | 2 | 5 | 7 |
| $$P(X=x\_{i})$$ | $$\frac{21}{32}$$ | $$\frac{7}{32}$$ | $$\frac{3}{32}$$ | $$\frac{1}{32}$$ |

b)

$E(X)=\left(-1\right)×$ $\frac{21}{32}$ $+2×$ $\frac{7}{32}$ $+5×$ $\frac{3}{32}$ $+7×\frac{1}{32}$ $=\frac{15}{32}$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32}$ $≈0,50$ signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 0,50 €.

**Partie 2 : Schéma de Bernoulli, loi binomiale**

 1) Épreuve de Bernoulli

Exemples :

1) Le jeu du pile ou face : On considère comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". La probabilité d’un succès est égale à $p=\frac{1}{2}$.

2) On lance un dé et on considère comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". La probabilité d’un succès est égale à $p=\frac{1}{6}$.

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" et "échec".

 2) Schéma de Bernoulli

Exemple : La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ = 10 et $p$ = $\frac{1}{2}$.

Définition : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est $p$.

 3) Loi binomiale

Si dans un schéma de Bernoulli, on répète la même expérience $n$ fois, alors il est possible d’obtenir 0 succès, 1 succès, 2 succès, … ou $n$ succès.

Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Une **loi binomiale** est une loi de probabilité qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque : $n $et $p $sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n ;p)$.

Exemple :

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

- P(X = 3) = p3.

En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de p $×$ p $×$ p = p3.

- X = 2 correspond aux issues suivantes :

(Succès ; Succès ; Échec)

(Succès ; Échec ; Succès)

(Échec ; Succès ; Succès)

Donc P(X = 2) = 3 p2 (1 – p)

En effet, les branches qui correspondent à 2 succès et 1 échec, donnent une probabilité de :

p $×$ p $×$ (1 – p) = p2 (1 – p).

Il y a 3 branches de ce type, soit : 3 x p2 (1 – p)

# Méthode : Calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide d'un arbre

 **Vidéo** [**https://youtu.be/b18\_r8r4K2s**](https://youtu.be/b18_r8r4K2s)



On tire trois fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 4 cartes qui contient une carte *Némo*. On considère comme succès l’événement « Obtenir la carte *Némo*. »

$X$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Calculer $P\left(X=2\right).$ Interpréter le résultat.

**Correction**

La variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p$ = $\frac{1}{4}$.

On représente dans un arbre de probabilité les issues de l’expérience composée de 3 tirages.



**➔ SSS**

**➔ SSE \***

**➔ SES \***

 **➔ SEE**

**➔ ESS \*

➔ ESE**

**➔ EES

➔ EEE**

À l’issue du chemin, on comptabilise les succès et les échecs ⇡

On cherche à calculer $P\left(X=2\right)$, on repère donc les chemins présentant deux succès (\*). On en compte 3.

Chacun de ces chemins correspond au calcul de probabilité : $\frac{3}{4}×\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

Et donc : $P\left(X=2\right)=3×\frac{3}{4}×\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

 $ =3×\frac{3}{4}×\frac{1}{16}$

 $ =\frac{9}{64}$

La probabilité d’obtenir deux fois la carte *Némo* sur 3 tirages est égale à $\frac{9}{64}$.

 4) Avec la calculatrice ou un tableur

Méthode : Utiliser une loi binomiale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7k4ZYdfWEY8**](https://youtu.be/7k4ZYdfWEY8)-Tuto TI

 **Vidéo** [**https://youtu.be/69IQIJ7lyww**](https://youtu.be/69IQIJ7lyww)- Tuto Casio

 **Vidéo** [**https://youtu.be/clrAMXKrPV4**](https://youtu.be/clrAMXKrPV4)- Tuto HP

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

a) Quelle est la loi suivie par $X$ ?

b) Calculer la probabilité $P(X=5)$.

c) Calculer la probabilité $P(X\leq 5)$.

d) Calculer la probabilité $P(X\geq 3)$.

**Correction**

a) On répète **7 fois** une expérience à deux issues : {3 ; 4 ; 5 ; 6} et {1 ; 2}.

Le **succès** est d’obtenir {3 ; 4 ; 5 ; 6}.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{4}{6}$ = $\frac{2}{3}$.

$X$ suit donc une loi binomiale de paramètres : $n$ = 7 et $p$ = $\frac{2}{3}$.

b) Avec Texas Instruments :

Touches « *2nd*» et « *VAR*» puis choisir « *binomFdP* ».

Et saisir les paramètres de l’énoncé : binomFdP(7,2/3,5)

Avec Casio :

Touche « *OPTN*» puis choisir « *STAT*», « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* »*.*

Et saisir les paramètres de l’énoncé : BinominalePD(5,7,2/3)

Avec le tableur :

Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;0)

On trouve $P(X=5)≈$ 0,31.

La probabilité d’obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

c) Avec Texas Instruments :

Touches « *2nd*» et « *VAR*» puis choisir « *binomFRép* ».

Et saisir les paramètres de l’énoncé : binomFRép(7,2/3,5)

Avec Casio :

Touche « *OPTN*» puis choisir « *STAT*», « *DIST* », « *BINM* » et « *Bcd* »*.*

Et saisir les paramètres de l’énoncé : BinominaleCD(5,7,2/3)

Avec le tableur :

Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)

On trouve $P\left(X\leq 5\right)≈ $0,74.

La probabilité d’obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

d) $P(X\geq 3)$ $= 1 – P(X\leq 2)$

 $≈$ $1 – 0,045$ (à l’aide de la calculatrice ou du tableur)

 $≈$ $0,955.$

 5) Représentation graphique

Méthode : Établir une loi binomiale avec une calculatrice ou un tableur

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8f-cfVFHIxg**](https://youtu.be/8f-cfVFHIxg)- Tuto TI

 **Vidéo** [**https://youtu.be/l9OoHVRpM8U**](https://youtu.be/l9OoHVRpM8U)- Tuto Casio

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n$ = 5 et $p$ = 0,4.

Représenter graphiquement la loi suivie par $X$ par un diagramme en bâtons.

**Correction**

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant $P(X=k)$ pour *k* entier,

$0\leq k\leq 5$.

Avec Texas Instruments :

Touche « *Y=* » et saisir comme expliqué plus haut :



Afficher la table : Touches « *2nd*» et « *GRAPH* » :



Avec Casio :

Dans « *MENU*», choisir « *TABLE* » ;

Saisir comme expliqué plus haut :



Afficher la table : Touche « *TABL*» :



Avec le tableur :

Saisir dans la cellule B1 : =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

Et copier cette formule vers le bas.



On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons :



6) Espérance de la loi binomiale

Propriété : Soit la variable aléatoire $X$ qui suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

On a : $E(X)$ = $n×p$

Exemple :

On lance 5 fois un dé à six faces.

On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.

On considère la variable aléatoire $X$ donnant le nombre de succès.

On a donc : $p=$ $\frac{2}{6}=$ $\frac{1}{3}$ et $n$ = 5.

Ainsi :

$E\left(X\right)=5×$ $\frac{1}{3}$ = $\frac{5}{3}$ $≈1,7$

On peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

Méthode : Calculer l’espérance d’une loi binomiale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/95t19fznDOU**](https://youtu.be/95t19fznDOU)

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte.

Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.

On répond au hasard à chaque question. Quelle note peut-on espérer obtenir ?

**Correction**

Soit $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.

Le succès est donc « obtenir une bonne réponse ».

$X$ suit une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $ p$ = $\frac{1}{3}$.

$$E\left(X\right)=8×\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

On peut espérer obtenir $\frac{8}{3}$ bonnes réponses en répondant au hasard.

On peut donc espérer obtenir comme note $\frac{8}{3}$ $×0,5=$ $\frac{4}{3}$ $≈1,33$ point sur 4 en répondant au hasard.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)