VARIABLES ALÉATOIRES (Partie 2)

Tout le cours sur la loi binomiale en vidéo : https://youtu.be/xMmfPUoBTtM

I. Somme de variables aléatoires

Exemple :
On considère deux jeux dont les gains sont donnés :
- pour le premier jeu, par la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 2.
- pour le second jeu, par la variable aléatoire Y qui prend les valeurs –2, 3 et 4.
Par exemple, l'évènement $(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1 € au premier jeu et perdu 2 € au deuxième jeu.
Considérons la variable aléatoire somme $X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux.
Alors la variable aléatoire $X + Y$ peut prendre les valeurs :
-1, 0, 4, 5 et 6.
En effet, on a par exemple $X + Y = 0$ avec $(X = 2) \cap (Y = -2)$.

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'évènement $X + Y = 5$, on pourra calculer : $P(X + Y = 5) = P\big((X = 1) \cap (Y = 4)\big) + P\big((X = 2) \cap (Y = 3)\big)$
On cherche toutes les sommes $X + Y$ égales 5.

Si de plus, les évènements X et Y sont indépendants, alors on a :
$$P(X + Y = 5) = P(X = 1)P(Y = 4) + P(X = 2)P(Y = 3)$$

Définition : Soit X et Y deux variables aléatoires. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :
$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$
Si, de plus, les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, alors on a :
$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i)\, P(Y = j)$$

Remarque : Le symbole Σ
Si par exemple, i et j sont des entiers naturels et $k = 2$ alors :
$$P(X + Y = 2) = \sum_{i+j=2} P((X = i) \cap (Y = j))$$
$$= P((X = 0) \cap (Y = 2)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) + P((X = 2) \cap (Y = 0))$$

Méthode : Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires

Vidéo https://youtu.be/0I7tz8oGh-s

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur « pile », on gagne 1 €, si on tombe sur « face », on gagne 2 €.
- La 2e partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 €.
Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 €.
La variable aléatoire X désigne les gains à la 1ère partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la 2e partie.
On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

Dans le tableau ci-dessous, on présente toutes les sommes possibles :

Y \ X	1	2
-5	-4	-3
1	2	3
2	3	4

Ainsi, on a :

$P(S = -4) = P(X = 1)P(Y = -5)$ en effet, les variables X et Y sont indépendantes.

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(S = -3) = P(X = 2)P(Y = -5)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(S = 2) = P(X = 1)P(Y = 1)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(S = 3) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(S = 4) = P(X = 2)P(Y = 2)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

On peut présenter la loi de probabilité de S dans un tableau :

k	-4	-3	2	3	4
$P(S = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

II. Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires

1) Linéarité de l'espérance

Propriétés :
1) $E(aX+b)=aE(X)+b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$
2) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

2) Variance

Propriété :
1) $V(aX+b)=a^2V(X)$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$
2) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Méthode : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

Vidéo https://youtu.be/ljlTvCBExVY

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
P($X = x_i$)	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire Y = 1000X – 1300.
La loi de probabilité de Y est alors :

y_i	–2	–1	0	1	2
P($Y = y_i$)	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :
$E(Y)$ = –2x0,2 + (–1)x0,1 + 1x0,4 + 2x0,1 = 0,1
$V(Y)$ = 0,2x(–2 – 0,1)^2 + 0,1x(–1 – 0,1)^2 + 0,2x(0 – 0,1)^2 + 0,4x(1 – 0,1)^2
+ 0,1x(2 – 0,1)^2 = 1,69

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :
$E(Y)$ = E(1000X – 1300) = 1000 $E(X)$ – 1300
Donc : $E(X)=\frac{E(Y)+1300}{1000}=\frac{0,1+1300}{1000}$ = 1,3001

$V(Y) = V(1000X - 1300) = 1000^2\ V(X)$

Donc : $V(X) = \dfrac{V(Y)}{1000^2} = \dfrac{1{,}69}{1000^2}$

Et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{1{,}69}{1000^2}} = \dfrac{1{,}3}{1000} = 0{,}0013$

Conclusion : $E(X) = 1{,}3001$ cm et $\sigma(X) = 0{,}0013$ cm.

III. Application à la loi binomiale

1) Échantillon d'une loi de probabilité

Exemple :
On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire.
Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans 99,8 % des cas.
Dans ce cas, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.
On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100})$ forment un échantillon de taille 100 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.

Définition : Un **échantillon de taille n d'une loi de probabilité** est une liste de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

Propriétés : Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi. On pose : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, alors on a :
1) $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$
2) $V(S) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Méthode : Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Vidéo https://youtu.be/fRYVMQk3bQQ

Un industriel fabrique des plats en verre qui doivent résister à de fortes températures afin de pouvoir être utilisés dans un four de cuisson. Pour vérifier la résistance du plat, on le soumet à une température de 350°C. On a constaté qu'en moyenne, sur un grand nombre de plats testés sortant de l'usine, 1,5 % des plats ne supportent pas une telle température et cassent.

On choisit au hasard 200 plats produits par l'usine et on effectue, pour chacun d'eux, le test de résistance. On admet qu'étant donné le grand nombre de plats produits par l'usine, ce choix peut être assimilé à un tirage fait de façon indépendante et avec remise.

On désigne par R la variable aléatoire comptant le nombre de plats résistants au test.
Calculer $E(R)$ et $\sigma(R)$. Interpréter les résultats.

On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le plat résiste au test et égale à 0 dans le cas contraire.
X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}985$. En effet, d'après l'énoncé, $E(X) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$ et $E(X) = p$ dans le cas d'une loi de Bernoulli.
Par conséquent, $V(X) = 0{,}985 \times (1 - 0{,}985) = 0{,}014775$.

On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, X_3, \dots X_{200})$ forment un échantillon de taille 200 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0{,}985$.
Et on a :
$E(R) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{200}) = 200 \times 0{,}985 = 197$
$V(R) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_{200}) = 200 \times 0{,}014775 \approx 2{,}995$
car $X_1, X_2, \dots X_{200}$ sont indépendants.
Soit : $\sigma(R) = \sqrt{2{,}995} \approx 1{,}72$.
En moyenne, sur un grand nombre d'échantillons de 200 plats, on peut espérer trouver 197 plats résistants avec un écart-type proche de 1,72.

2) Échantillon de la loi de Bernoulli

Propriété : Soit $(X_1, X_2, \dots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.
La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple :
En reprenant l'exemple donné au début du paragraphe *III.1.*, la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}998$.

3) Espérance, variance et écart type de la loi binomiale

Propriété : Soit S une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
$E(S) = np$ $\qquad$ $V(S) = np(1-p)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{V(S)}$

Démonstration au programme :
Vidéo https://youtu.be/ljWJfGLRgJE

Soit $(X_1, X_2, \dots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.
On rappelle que pour une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli, on a :
$E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.
Donc, on a :
$E(S) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = p + p + \cdots + p = np$
$V(S) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$ car $X_1, X_2, \dots X_n$ sont indépendants.
Donc : $V(S) = p(1-p) + p(1-p) + \cdots = p(1-p) = np(1-p)$

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type pour une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/95t19fznDOU
Vidéo https://youtu.be/MvCZw9XIZ4Q

On lance 5 fois de suite un dé à six faces.
On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.
On considère la variable aléatoire S donnant le nombre de succès.
Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

La variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{3}$ et $n = 5$.
$E(S) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$
$V(S) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$
$\sigma(S) = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$
En moyenne, on peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

La loi binomiale avec la calculatrice :
Vidéos dans la Playlist :
https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-terminale#14