LOI DES GRANDS NOMBRES – Chapitre 1/2

Tout le cours sur la somme de variables aléatoires en vidéo :
https://youtu.be/GweMOVratYI

Partie 1 : Somme de variables aléatoires

Exemple :
On considère deux jeux dont les gains sont donnés :
- pour le premier jeu, par la variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 et 2.
- pour le second jeu, par la variable aléatoire Y qui prend les valeurs –2, 3 et 4.
Par exemple, l'évènement $(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1 € au premier jeu et perdu 2 € au deuxième jeu.
Considérons la variable aléatoire somme $X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux.
Alors la variable aléatoire $X + Y$ peut prendre les valeurs :
-1, 0, 4, 5 et 6.
En effet, on a par exemple $X + Y = 0$ avec $(X = 2) \cap (Y = -2)$.

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'évènement $X + Y = 5$, on cherche toutes les sommes $X + Y$ égales à 5.
On a ainsi : $P(X + Y = 5) = P\big((X = 1) \cap (Y = 4)\big) + P\big((X = 2) \cap (Y = 3)\big)$

Si de plus, les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, alors on a :
$$P(X + Y = 5) = P(X = 1) \times P(Y = 4) + P(X = 2) \times P(Y = 3)$$

Définition : Soit X et Y deux variables aléatoires. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :
$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$
Si, de plus, les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, alors on a :
$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i) \times P(Y = j)$$
On dit dans ce cas que les **variables aléatoires X et Y sont indépendantes**.

Remarque : Le symbole Σ
Si par exemple, $k = 2$ alors :
$$P(X + Y = 2) = \sum_{i+j=2} P((X = i) \cap (Y = j))$$
$$= P((X = 0) \cap (Y = 2)) + P((X = 1) \cap (Y = 1)) + P((X = 2) \cap (Y = 0))$$

Méthode : Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires

Vidéo https://youtu.be/0l7tz8oGh-s

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :
- La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur « pile », on gagne 1 €, si on tombe sur « face », on gagne 2 €.

- La 2^e^ partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 €.
Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 €.
La variable aléatoire X désigne les gains à la 1$^{\text{ère}}$ partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la 2$^{\text{e}}$ partie.
On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

Correction
Dans le tableau ci-dessous, on présente toutes les sommes possibles :

Y \ X	1	2
-5	-4	-3
1	2	3
2	3	4

Ainsi, on a :

$$P(S=-4) = P((X=1) \cap (Y=-5))$$
$$= P(X=1) \times P(Y=-5) \text{ en effet, les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(S=-3) = P(X=2) \times P(Y=-5)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(S=2) = P(X=1) \times P(Y=1)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(S=3) = P(X=1) \times P(Y=2) + P(X=2) \times P(Y=1)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(S=4) = P(X=2) \times P(Y=2)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

On peut présenter la loi de probabilité de S dans un tableau :

k	-4	-3	2	3	4
$P(S=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

Partie 2 : Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires

Propriétés :
- $E(aX+b)=aE(X)+b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $V(aX+b)=a^2V(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Méthode : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

Vidéo https://youtu.be/ljITvCBExVY

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X=x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

Correction
Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y=1\,000X-1\,300$.
La loi de probabilité de Y est alors :

y_i	-2	-1	0	1	2
$P(Y=y_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :
$E(Y)=-2\times 0,2+(-1)\times 0,1+1\times 0,4+2\times 0,1=0,1$
$V(Y)=0,2\times(-2-0,1)^2+0,1\times(-1-0,1)^2+0,2\times(0-0,1)^2+0,4\times(1-0,1)^2$
$+0,1\times(2-0,1)^2$
$=1,69$

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :
$E(Y)=E(1\,000X-1\,300)=1\,000\,E(X)-1\,300$
Donc : $E(X)=\dfrac{E(Y)+1\,300}{1\,000}=\dfrac{0,1+1\,300}{1\,000}=1,300\,1$
$V(Y)=V(1\,000\,X-1\,300)=10\,00^2\,V(X)$
Donc : $V(X)=\dfrac{V(Y)}{1\,000^2}=\dfrac{1,69}{1\,000^2}$

Et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1{,}69}{1\,000^2}} = \frac{1{,}3}{1\,000} = 0{,}001\,3$
Conclusion : $E(X) = 1{,}3001\ cm$ et $\sigma(X) = 0{,}001\,3\ cm$.

Partie 3 : Application à la loi binomiale

1) Échantillon d'une loi de probabilité

Exemple :
On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire.
Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans 99,8 % des cas.
Dans ce cas, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.
On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100})$ forme un échantillon de taille 100 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.

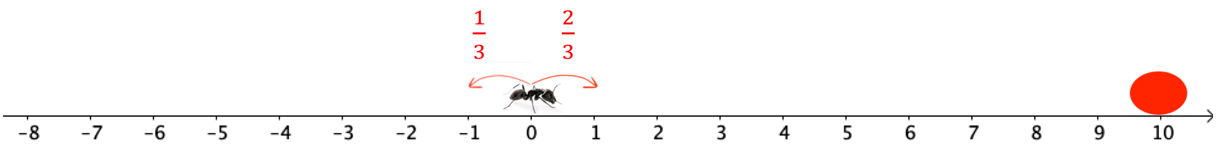
Définition : Un **échantillon de taille n d'une loi de probabilité** est une liste de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

Propriétés : Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi. On pose : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, alors on a :
1) $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$
2) $V(S) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Méthode : Calculer une espérance et une variance à l'aide d'une somme de variables aléatoires

Vidéo https://youtu.be/19nVXFHbmjU

Sur un axe gradué, on dépose une petite goûte de confiture à la fraise au point d'abscisse 10.
Pierrot invite Sophie la fourmi à se placer à l'origine de l'axe gradué.
Attirée par la confiture, Sophie se déplace de façon aléatoire d'une unité vers la droite (sens positif) avec la probabilité de $\frac{2}{3}$ et d'une unité vers la gauche (sens négatif) avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.
On suppose que les déplacements de la fourmi sont indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la fourmi se déplace vers la droite au k-ième déplacement et valant -1 si elle se déplace vers la gauche.
On note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire somme des X_k.



1) Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$
2) En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
3) Au bout de combien de déplacements, Sophie peut-elle espérer théoriquement atteindre la goûte de confiture ? Calculer $\sigma(S_n)$ dans ce cas.

Correction
1) On établit la loi de probabilité de X_k :

x_i	-1	1
$P(X_k = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$E(X_k) = -1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$V(X_k) = \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

2) On a : $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
Donc la variable aléatoire S_n donne l'abscisse de la fourmi après n déplacements.
Et on a : $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$
$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$
$= nE(X_k)$
$= \frac{n}{3}$

Et : $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$
$= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$, car les variables sont indépendantes.
$= nV(X_k)$
$= \frac{8n}{9}$

3) $E(S_n) = 10$
$\frac{n}{3} = 10$
$n = 30$
Après 30 déplacements, Sophie peut espérer théoriquement atteindre la goûte de confiture.
$\sigma(S_{30}) = \sqrt{V(S_{30})} = \sqrt{V(S_{30})} = \sqrt{\frac{8 \times 30}{9}} \approx 5{,}2$ unités.

2) Échantillon de la loi de Bernoulli

Propriété : Soit $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.
La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple :
En reprenant l'exemple donné au début de la partie 3.1, la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}998$.

3) Espérance, variance et écart type de la loi binomiale

Propriété : Soit S une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
$E(S) = np$ $\quad V(S) = np(1-p)$ $\quad \sigma(S) = \sqrt{V(S)}$

Démonstration au programme :
Vidéo https://youtu.be/ljWJfGLRgJE

Soit $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.
On rappelle que pour une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli, on a :
$E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.
Donc, on a :
$E(S) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = p + p + \cdots + p = np$
$V(S) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$ car $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont indépendantes.
Donc : $V(S) = p(1-p) + p(1-p) + \cdots + p(1-p) = np(1-p)$

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type pour une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/95t19fznDOU
Vidéo https://youtu.be/MvCZw9XIZ4Q

On lance 5 fois de suite un dé à six faces.
On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.
On considère la variable aléatoire S donnant le nombre de succès.
Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

Correction

La variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{3}$ et $n = 5$.

$E(S) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$

$V(S) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$

$\sigma(S) = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

En moyenne, on peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

La loi binomiale avec la calculatrice :

Vidéos dans la Playlist :
https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-terminale#14