SUITES ARITHMÉTIQUES

Rappel : Reconnaître une suite arithmétique et une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/pHq6oClOylU

Partie 1 : Relation de récurrence (Rappel)

Exemples :

a) Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant 5.
Si le premier terme est égal à 3, les termes suivants sont :
$u_0 = 3$,
$u_1 = 8$,
$u_2 = 13$,
$u_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

b) Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme 5 et de raison -2.
Les premiers termes successifs sont :
$v_0 = 5$,
$v_1 = 5 - 2 = 3$,
$v_2 = 3 - 2 = 1$,
$v_3 = 1 - 2 = -1$.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que :
$u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Partie 2 : Forme explicite en fonction de n

Méthode : Exprimer une suite arithmétique en fonction de n

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive.
Il commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d'une longueur de 3 000 m.
Au « jour 1 », il court 3 150 m. Au « jour 2 », il court 3 300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille.
On note u_n la distance parcourue au « jour n » d'entraînement.

a) Calculer u_3 et u_4.

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.

c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
d) Exprimer u_n en fonction de n.

Correction
a) u_0 = 3 000
u_1 = 3 150
u_2 = 3 300
u_3 = 3 450
u_4 = 3 600

b) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 = 3 000 et de raison r = 150.
On parle ici de **croissance linéaire**.

c) $u_{n+1} = u_n + 150$

d) Après 1 jour, il parcourt : $u_1 = 3\,000 + 150 \times 1$
Après 2 jours, il parcourt : $u_2 = 3\,000 + 150 \times 2$
Après 3 jours, il parcourt : $u_3 = 3\,000 + 150 \times 3$
De manière générale, après n jours, il parcourt : $u_n = 3\,000 + 150n$

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
On a : $u_n = u_0 + nr$

Méthode : Déterminer une expression en fonction de n d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

a) Déterminer l'expression, en fonction de n, de la suite arithmétique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$$
b) Déterminer l'expression, en fonction de n, de la suite arithmétique définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Correction
a) On a : $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 4$
On passe d'un terme au suivant en ajoutant -4, et donc la raison r est égale à -4 et le premier terme u_0 est égal à 7.
Ainsi :
$u_n = u_0 + nr$
$u_n = 7 + n \times (-4)$
$u_n = 7 - 4n$

b) On a : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 3$
On passe d'un terme au suivant en ajoutant 3, donc la raison r est égale à 3.
Ici, le terme u_0 n'est pas donné mais on peut le calculer.

Pour passer de u_1 à u_0, on retire 3 (« marche arrière ») donc $u_0 = u_1 - 3 = 2$.
Ainsi :
$u_n = u_0 + nr$
$u_n = 2 + 3n$

⚠ À noter : Il peut être pratique d'appliquer directement la formule : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Partie 3 : Sens de variation et représentation graphique (Rappel)

1) Sens de variation

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison *r*.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

Étudier les variations des suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par :
a) $u_n = 3 + 5n$
b) $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = v_n - 4 \end{cases}$

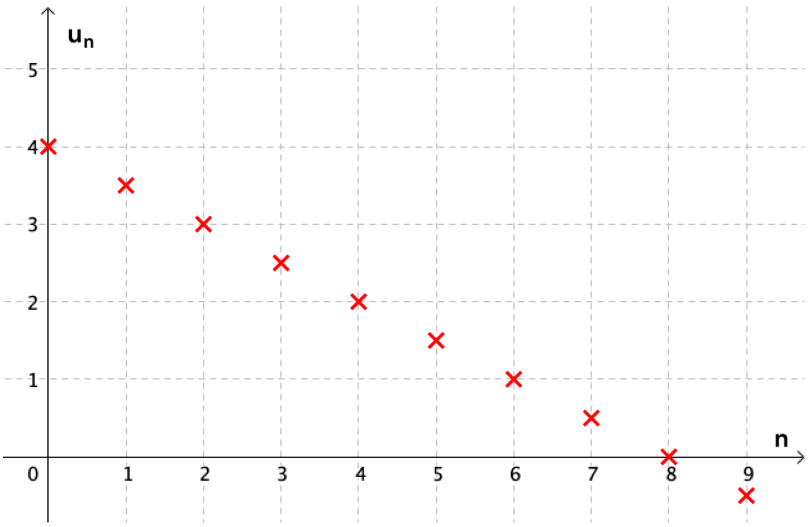
Correction
a) (u_n) est croissante car de raison positive et égale à 5.

b) On passe d'un terme au suivant en ajoutant -4. (v_n) est décroissante car de raison négative et égale à -4.

2) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite arithmétique de raison –0,5 et de premier terme 4.



Partie 4 : Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété : Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$Somme = nombre\ de\ termes \times \frac{1er\ terme\ de\ la\ somme + dernier\ terme}{2}$$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/q9kcwb6f4Bw

On reprend le contexte de la méthode de la partie 1.
a) Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** lorsqu'il sera au « jour 15 » de son entraînement ?
b) Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** entre le « jour 8 » et le « jour 12 » ?

Correction
a) La distance parcourue au total au « jour 15 » d'entraînement est :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$$

Ainsi :

$$Somme = 16 \times \frac{u_0 + u_{15}}{2} = 16 \times \frac{3\,000 + 3\,000 + 150 \times 15}{2} = 16 \times \frac{8\,250}{2} = 66\,000$$

Pour vérifier, on peut utiliser la calculatrice :

Sur TI :
- Pour accéder au catalogue : « 2^nde^ » puis « 0 ».
- Appuyer sur « ln » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « S ».
- Choisir « som(» ou « somme(» ou « sum(» (suivant les modèles).
- Procéder de même pour afficher « suite(» ou « seq(» (suivant les modèles).
- Et compléter pour afficher : **som(suite(3000+150X,X,0,15))**

Sur Casio :
- Pour accéder au catalogue : « SHIFT» puis « 4 ».
- Appuyer sur « X » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « S ».
- Choisir $\Sigma($.
- Et compléter pour afficher : $\sum_{X=0}^{15}(3000+150X)$

La calculatrice affiche 66 000. Ce qui signifie que l'athlète a parcouru 66 000 m soit 66 km au « jour 15 » d'entraînement.

Pour noter une telle somme, on peut utiliser le symbole $\sum$:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k = 66\,000$$

b) La distance parcourue au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 » d'entraînement est :

$$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = \sum_{k=8}^{12} u_k$$

$$Somme = 5 \times \frac{u_8 + u_{12}}{2} = 5 \times \frac{3\,000 + 150 \times 8 + 3\,000 + 150 \times 12}{2} = 5 \times \frac{9\,000}{2} = 22\,500$$

Pour vérifier, on saisit sur la calculatrice :

Sur TI : **som(suite(3000+150X,X,8,12))**

Sur Casio : $\sum_{X=8}^{12}(3000+150X)$

La calculatrice affiche 22 500. Ce qui signifie que l'athlète a parcouru 22 500 m soit 22,5 km au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 »d'entraînement.

$$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = \sum_{k=8}^{12} u_k = 22\,500$$

Partie 5 : Moyenne arithmétique de deux nombres

Définition : En mathématiques, la **moyenne arithmétique** d'une liste de nombres est la somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs.

Méthode : Calculer une moyenne arithmétique de deux nombres

Vidéo https://youtu.be/a-RRUIS_CR8

a) Calculer la moyenne arithmétique des nombres –3 et 19.
b) Peut-on affirmer que chaque terme d'une suite arithmétique est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit ?

Correction
a) La moyenne arithmétique d'une liste de valeurs est donc la moyenne que l'on connait depuis le collège.
Soit ici :

$$m = \frac{-3 + 19}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

b) Si on note u_n le terme d'une suite arithmétique, on a : $u_{n+1} = u_n + r$, où r est la raison de la suite.
Et on a également : $u_n = u_{n-1} + r$ donc $u_{n-1} = u_n - r$

La moyenne arithmétique du terme qui précède u_n et du terme qui le suit est égale à :
$m = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

$$= \frac{u_n - r + u_n + r}{2}$$
$$= \frac{2u_n}{2}$$
$$= u_n$$

Donc u_n est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

RÉSUMÉ	(u_n) une suite arithmétique - de raison r - de premier terme u_0.	Exemple : $r = -0{,}5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0{,}5$.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = 4 - 0{,}5n$
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0{,}5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Somme des termes consécutifs	$Somme = nombre\ de\ termes \times \frac{1er\ terme + dernier\ terme}{2}$	$u_3 + \cdots + u_{10} = 8 \times \frac{u_3 + u_{10}}{2}$
Représentation graphique	Remarques : Les points de la représentation graphique sont alignés. On parle de croissance linéaire.