LES SUITES – Chapitre 2/2

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/MJv7\_pkFcdA**](https://youtu.be/MJv7_pkFcdA)

**Partie 1 : Limites et comparaison**

1. Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :

Soit deux suites et .

Si, à partir d'un certain rang, on a alors .

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite pousse la suite vers à partir d'un certain rang.



Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/qIBlhdofYFI**](https://youtu.be/qIBlhdofYFI)

Soit un nombre réel *.*

- , donc l'intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note .

On a donc pour tout , .

- A partir d'un certain rang, que l'on note , on a .

- Ainsi pour tout , on a : .

On en déduit que l'intervalle contient tous les termes de la suite à partir du rang .

Et donc .

Théorème 2 :

Soit deux suites et .

Si, à partir d'un certain rang, on a : alors .

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iQhh46LupN4**](https://youtu.be/iQhh46LupN4)

Déterminer la limite suivante :

**Correction**

On a :

 donc :

Or, donc par comparaison, .

1. Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :

Soit trois suites , et .

Si, à partir d'un certain rang, on a :alors .

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites et (les gendarmes) se resserrent autour de la suite à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Démonstration :

Soit un intervalle ouvert contenant .

- , donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note .

- , donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note .

- A partir d'un certain rang, que l'on note , on a .

- Ainsi pour tout , l'intervalle contient tous les termes de la suite .

Et donc .

Méthode : Déterminer une limite par encadrement

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OdzYjz\_vQbw**](https://youtu.be/OdzYjz_vQbw)

Déterminer la limite suivante :

**Correction**

On a : donc :

Or : donc d'après le théorème des gendarmes :

Et donc .

Remarque : On utilise le théorème de comparaison pour démontrer une limite infinie et le théorème d’encadrement pour une limite finie.

**Partie 2 : Suites majorées, minorées, bornées**

 1) Définitions :

Définitions :

- La suite est **majorée** s'il existe un réel tel que pour tout entier naturel , on a : .

- La suite est **minorée** s'il existe un réel tel que pour tout entiernaturel, on a :

.

- La suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- Les suites de terme général ou sont bornées car minorées par et majorées par .

- La suite de terme général est minorée par 0. Mais elle n’est pas majorée.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/F1u\_BVwiW8E**](https://youtu.be/F1u_BVwiW8E)

On considère la suite définie pour tout entier naturel par et . Démontrer par récurrence que la suite est majorée par 3.

**Correction**

* **Initialisation :**

La propriété est donc vraie pour .

* **Hérédité :**

 - Hypothèse de récurrence :

 Supposons qu'il existe un entier tel que la propriété soit vraie : .

 - Démontrons que : La propriété est vraie au rang : .

On a :

Donc :

Soit :

* **Conclusion :**

La propriété est vraie pour et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel , soit : . Donc est majorée.

2) Convergence des suites monotones

Propriété : Si une suite est croissante et admet pour limite , alors elle est majorée par .

Démonstration par l'absurde :

Démontrons par l’absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un rang *p*, tel que . »

- L'intervalle ouvert contient .

Or, par hypothèse, . Donc l'intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (1).

- Comme est croissante : pour .

Donc si , alors (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas , tel que .

Et donc la suite est majorée par .

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.

- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

*- Admis -*

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

Dans l'exemple ci-dessous, la suite est décroissante et minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2. Elle peut être égale à 4 !



Méthode : Utiliser le théorème de convergence monotone

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gO-MQUlBAfo**](https://youtu.be/gO-MQUlBAfo)

On considère la suite définie pour tout entier naturel par et .

Démontrer que la suite est convergente.

**Correction**

On a démontré dans le chapitre « LES SUITES – Chapitre 1/2 Partie 1 » que la suite est croissante.

On a démontré dans la méthode précédente que la suite est majorée par 3.

La suite est donc croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite est convergente.

Corollaire :

1) Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers .

2) Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers .

Démonstration (du 1) au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/rttQIYOKCRQ**](https://youtu.be/rttQIYOKCRQ)

Soit un réel .

Comme n'est pas majorée, il existe un entier tel que .

La suite est croissante donc pour tout , on a : .

Donc pour tout , on a : .

Et donc à partir d'un certain rang , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle .

On en déduit que .

**Partie 3 : Comportement à l'infini d'une suite géométrique**

1. Rappel

Propriété : Soit une **suite géométrique** de raison et de premier terme .

Alors, pour tout entier on a :

 ● (forme de récurrence)

 ● (forme explicite).

Exemple : Soit une suite géométrique de raison –3 et de premier terme 5.

On a : et .

1. Limites

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | *Pas de limite* | 0 | 1 |  |

Démonstration au programme dans le cas :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aSBGk\_GEEew**](https://youtu.be/aSBGk_GEEew)

Prérequis : Pour tout entier naturel , on a : (*inégalité de Bernoulli)*, démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que , alors on peut poser avec .

, d’après l’inégalité de Bernoulli.

Or car .

Donc d’après le théorème de comparaison : .

Exemple : La suite de terme général a pour limite car .

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6-vFnQ6TghM**](https://youtu.be/6-vFnQ6TghM)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0CNt\_fUuwEY**](https://youtu.be/0CNt_fUuwEY)

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.

On note la somme épargnée à l'année .

On a alors : et .

1) Calculer et .

2) Prouver que la suite définie pour tout entier par est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

3) Exprimer en fonction de .

4) En déduire en fonction de . Puis calculer .

5) Étudier les variations de .

**Correction**

1)

2)

, car

Donc est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

.

3) Pour tout , on a : .

4)

On a alors :

5)

Donc la suite est strictement croissante.

3) Somme des termes d’une suite géométrique

Propriété : est un entier naturel non nul et un réel différent de 1 alors on a :

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XTftGHfnYMw**](https://youtu.be/XTftGHfnYMw)

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

**Correction**

 est une suite géométrique de raison –2 strictement inférieure à –1.

Donc ne possède pas de limite.

Et donc n'existe pas.

b)

•

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l’indétermination :

• Or , comme limite d’une suite géométrique de raison avec

 .

Donc : .

• comme limite d’une suite géométrique de raison .

Donc, comme limite d'un produit :

Soit : .

On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison et de premier terme 1. Donc :

Or , comme limite d’une suite géométrique de raison avec

 .

Donc : .

Et donc : .

Soit : .

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)