LES SUITES (Partie I)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/MJv7_pkFcdA

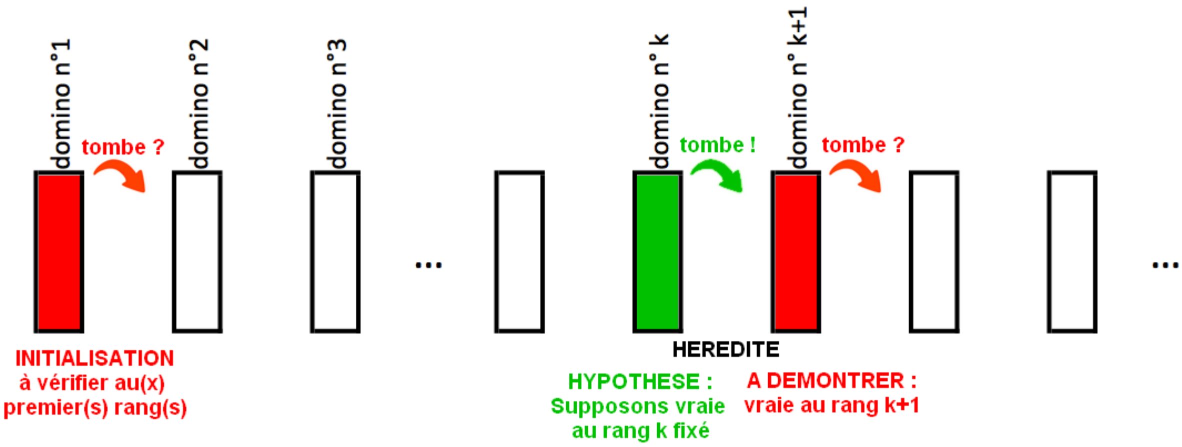
I. Raisonnement par récurrence

1) Le principe

C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932), ci-contre, que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).

Vidéo https://youtu.be/udGGIHdSAqc

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.



Définition : Une propriété est dite **héréditaire** à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino (k) tombe alors le domino suivant (k+1) tombe également.

Principe du raisonnement par récurrence :
Si la propriété P est : - vraie au rang n_0 (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),
alors la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici $n_0 = 1$.
L'hérédité est vérifiée (voir plus haut).
On en déduit que tous les dominos tombent.

Remarque : Une démonstration par récurrence sur les entiers est mise en œuvre lorsque toute démonstration "classique" est difficile.

2) Exemples avec les suites

Méthode : Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite

Vidéo https://youtu.be/OIUi3MG8efY

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.
Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

- **Initialisation :** → Le premier domino tombe.

$(0+1)^2 = 1 = u_0$.
La propriété est donc vraie pour n = 0.

- **Hérédité :**
  - Hypothèse de récurrence : → On suppose que le k-ième domino tombe.
  Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k = (k+1)^2$.
  - Démontrons que : → Le k+1-ième domino tombe-t-il ?
  La propriété est vraie au rang k+1, soit : $u_{k+1} = (k+1+1)^2$, soit encore :
  $$u_{k+1} = (k+2)^2$$

$u_{k+1} = u_k + 2k + 3$, par définition
$= (k+1)^2 + 2k + 3$, par hypothèse de récurrence
$= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$
$= k^2 + 4k + 4$
$= (k+2)^2$ → Le k+1-ième domino tombe.

- **Conclusion :** → Tous les dominos tombent.

La propriété est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n = (n+1)^2$.

Méthode : Démontrer la monotonie par récurrence

Vidéo https://youtu.be/nMnLaE2RAGk

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

On va démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \geq u_n$

- **Initialisation :** $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 = \frac{8}{3} > 2$

donc $u_1 \geq u_0$

- **Hérédité :**
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_{k+1} \geq u_k$.
  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang k+1 : $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

On a $u_{k+1} \geq u_k$ donc : $\frac{1}{3}u_{k+1} \geq \frac{1}{3}u_k$ et donc $\frac{1}{3}u_{k+1} + 2 \geq \frac{1}{3}u_k + 2$ soit $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_{n+1} \geq u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

3) Inégalité de Bernoulli

Soit un nombre réel a positif.
Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/H6XJ2tB1_fg

- **Initialisation :**

- La propriété est vraie pour n = 0.
En effet, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$.

- **Hérédité :**
  - Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $(1+a)^k \geq 1 + ka$

- Démontrons que : la propriété est vraie au rang k+1, soit :
$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$

$(1+a)^k \geq 1 + ka$, d'après l'hypothèse de récurrence.
Donc : $(1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka)$
Soit : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2$
Soit encore : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$, car $ka^2 \geq 0$.
Et donc : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

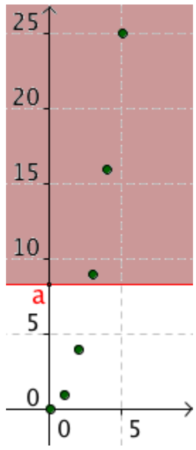
Remarque : L'initialisation est indispensable sinon on peut démontrer des propriétés fausses !

En effet, démontrons par exemple que la propriété "2^n est divisible par 3" est héréditaire sans vérifier l'initialisation.

Supposons qu'il existe un entier k tel que 2^k est divisible par 3.
$2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2$, où p est un entier (d'après l'hypothèse de récurrence).
$= 6p$
Donc 2^{k+1} est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.

II. Limite finie ou infinie d'une suite

1) Limite infinie



Exemple :
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définitions : - On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a\,;+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel

Définir fonction seuil(A)
 	
n ← 0
u ← 2
 	
Tant que u < A
    n ← n + 1
    u ← 4u
Fin Tant que
 	
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 100, on obtient en sortie n = 3.
A partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

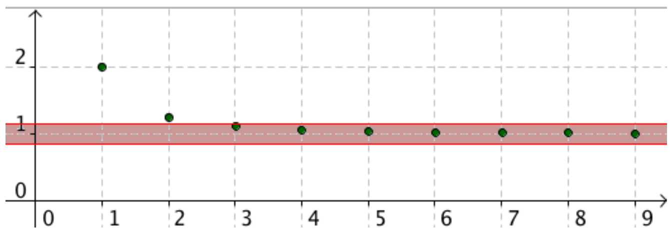
En langage calculatrice et Python, cela donne :

TI	CASIO	Python

PROGRAM:SEUIL
:Input A
:0→N
:2→U
:While U<A
:N+1→N
:4*U→U
:End
:Disp N
	======SEUIL
	"A="?→A↵
	0→N↵
	2→U↵
	While U<A↵
	N+1→N↵
	4×U→U↵
	WhileEnd↵
	N
		def seuil(a):
		    n=0
		    u=2
		    while u<a:
		        n=n+1
		        u=4*u
		    return(n)

2) Limite finie

Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.
En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.
Une telle suite est dite **convergente**.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque :
Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs –1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriétés :
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Démonstration de : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
Soit un intervalle quelconque ouvert $]-a\,;a[$, a réel positif non nul, contenant 0.
Pour tout n, tel que : $n > \frac{1}{a}$, on a : $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc $\frac{1}{n} \in \,]-a\,;a[$

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]-a\,;a[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

III. Opérations sur les limites

Vidéo https://youtu.be/v7hD6s3thp8

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)(n^2 + 3) = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + 3) = +\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)(n^2 + 3) = +\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2-3 = -\infty$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = 0$

Remarque :
Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.
Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une indétermination

Vidéo https://youtu.be/RQhdU7-KLMA
Vidéo https://youtu.be/wkMleHBnyqU
Vidéo https://youtu.be/loytWsU4pdQ
Vidéo https://youtu.be/9fEHRHdbnwQ

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

a) • $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n+1 = -\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

$$n^2-5n+1 = n^2\left(1-\frac{5n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$ par limite d'une somme.

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$ par limite d'un produit.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1 = +\infty$.

b) • $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination :

$$n - 3\sqrt{n} = n\left(1 - \frac{3\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1 - \frac{3\left(\sqrt{n}\right)^2}{n\sqrt{n}}\right) = n\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} = 1$ donc par limite d'un produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 3\sqrt{n} = +\infty$

c) • $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2 + 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 + 3n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5$ par limite d'une somme.

On prouve de même que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4$.

Donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{5}{4}$.

d) • $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 + n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 3 = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{3n^2+n}{n+3} = \frac{n^2}{n} \times \frac{3+\frac{n}{n^2}}{1+\frac{3}{n}} = n \times \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

• Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$ par limite d'une somme.

On prouve de même que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$.

Donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 3$.

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = +\infty$ par limite d'un produit.

Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2+n}{n+3} = +\infty$.

e) • $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination par la méthode de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

• Or par limite d'une somme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty$

Et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$ par limite d'un quotient.

Soit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0$.