

LES SUITES (Partie 2)

I. Comportement à l'infini des suites géométriques

1) Rappels

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 5.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .
Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : Pour la suite précédente, on a pour tout n : $u_n = 5 \times 3^n$.

2) Limites d'une suite géométrique

q	$0 \leq q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$	0	1	$+\infty$

Exemples :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad c) \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 0,5^n) = 1$$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

▶ Vidéo <https://youtu.be/F-PGmlK5Ypg>

▶ Vidéo <https://youtu.be/2BueBAoPvvc>

Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3} \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $q = 2 > 1$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3} = +\infty$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $0 \leq q = \frac{1}{5} < 1$. Donc :

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

$$\text{Et donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$$

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/rlaYMPbWE8>

Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$

$$\begin{aligned} S &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13} \\ &= \frac{1 - 3^{14}}{1 - 3} \\ &= 2\,391\,484 \end{aligned}$$

4) Limite de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Méthode : Calculer la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/XTftGHfnYMw>

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/6QjMEzEn5X0>

1) Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2) Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = 4$.
On note $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Calculer la limite de la suite (S_n) .

1) On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0, \text{ car } 0 \leq q = \frac{1}{2} < 1.$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1.$$

$$\text{Et donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2.$$

$$\text{Soit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

$$\begin{aligned} 2) S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= 4 + 4 \times 0,2 + 4 \times 0,2^2 + \dots + 4 \times 0,2^n \\ &= 4(1 + 0,2 + 0,2^2 + \dots + 0,2^n) \\ &= 4 \times \frac{1 - 0,2^{n+1}}{1 - 0,2} \\ &= 5 \times (1 - 0,2^{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n+1} = 0 \text{ car } 0 \leq q = 0,2 < 1.$$

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 0,2^{n+1} = 1$$

$$\text{Et donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \times (1 - 0,2^{n+1}) = 5$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 5.$$

Méthode : Modéliser un problème à l'aide d'une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/XcszOqP9sbk>

Un entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30 % chaque mois.

- 1) Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.
- 2) Que peut-on penser de l'évolution de la somme total du capital investi dans un futur éloigné ?

1) On note (u_n) le capital injecté au n -ième mois alors $u_{n+1} = 0,7u_n$.
 (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $u_0 = 20000$.
 Le total du capital investi à la fin de la première année est :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{11} \\ &= 20000 + 20000 \times 0,7 + 20000 \times 0,7^2 + \dots + 20000 \times 0,7^{11} \\ &= 20000 \times (1 + 0,7 + 0,7^2 + \dots + 0,7^{11}) \end{aligned}$$

$$= 20000 \times \frac{1 - 0,7^{12}}{1 - 0,7}$$

$$\approx 65744$$

2) Il s'agit de calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

En reprenant le principe des calculs effectués dans la question 1, on obtient :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= 20000 \times \frac{1 - 0,7^{n+1}}{1 - 0,7}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7 \times 0,7^n = 0$, car $0 \leq q = 0,7 < 1$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 20000 \times \frac{1 - 0,7^{n+1}}{1 - 0,7} = 20000 \times \frac{1}{1 - 0,7} = \frac{20000}{0,3} \approx 66\,666,67$$

Dans un futur éloigné, la somme totale du capital investi tend à se rapprocher de 66666,67 €.

II. Les suites arithmético-géométriques

1) Définition

Définition : Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite arithmético-géométrique

 Vidéo <https://youtu.be/6-vFnQ6TghM>

 Vidéo https://youtu.be/0CNt_fUuwEY

 Vidéo <https://youtu.be/EgYTH79sDfw>

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus.

On note (u_n) la somme épargnée à l'année n .

On a alors : $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Démontrer que la suite (c_n) définie pour tout entier n par $c_n = -10000$ vérifie la relation de récurrence de (u_n) .
- 3) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - c_n$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
- 4) Exprimer v_n en fonction de n .
- 5) En déduire u_n en fonction de n . Puis calculer u_{10} .
- 6) Étudier les variations de (u_n) .
- 7) Calculer la limite de (u_n) .

- 1) $u_1 = 1,03u_0 + 300 = 5450$
 $u_2 = 1,03u_1 + 300 = 5913,5$
- 2) $1,03c_n + 300 = 1,03 \times (-10000) + 300 = -10300 + 300 = -10000 = c_{n+1}$
- 3) $v_n = u_n - c_n = u_n + 10000$, soit :
- $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 10000 \\ &= 1,03u_n + 300 + 10000 \\ &= 1,03u_n + 10300 \\ &= 1,03(v_n - 10000) + 10300, \text{ car } v_n = u_n + 10000 \\ &= 1,03v_n - 10300 + 10300 \\ &= 1,03v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000$.

4) Pour tout n , $v_n = 15000 \times 1,03^n$.

5) Pour tout n , $u_n = v_n - 10000 = 15000 \times 1,03^n - 10000$

On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$

6) Pour tout n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 15000 \times 1,03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1,03^n - 10000) \\ &= 15000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n) \\ &= 15000 \times 1,03^n \times (1,03 - 1) \\ &= 450 \times 1,03^n > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1,03^n = +\infty$, car $q = 1,03 > 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 15000 \times 1,03^n = +\infty$

Et donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} 15000 \times 1,03^n - 10000 = +\infty$ soit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

2) Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Théorème :

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n , on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers L de I alors $f(L) = L$.

- Admis -

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

 Vidéo <https://youtu.be/L7bBL4z-r90>

 Vidéo <https://youtu.be/LDRx7aS9JsA> (Cas d'une suite quelconque)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = 0,85x + 1,8$.

1) a) Calculer u_1 .

b) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

c) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 , u_2 et u_3 . On laissera apparent les traits de construction.

d) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n) .

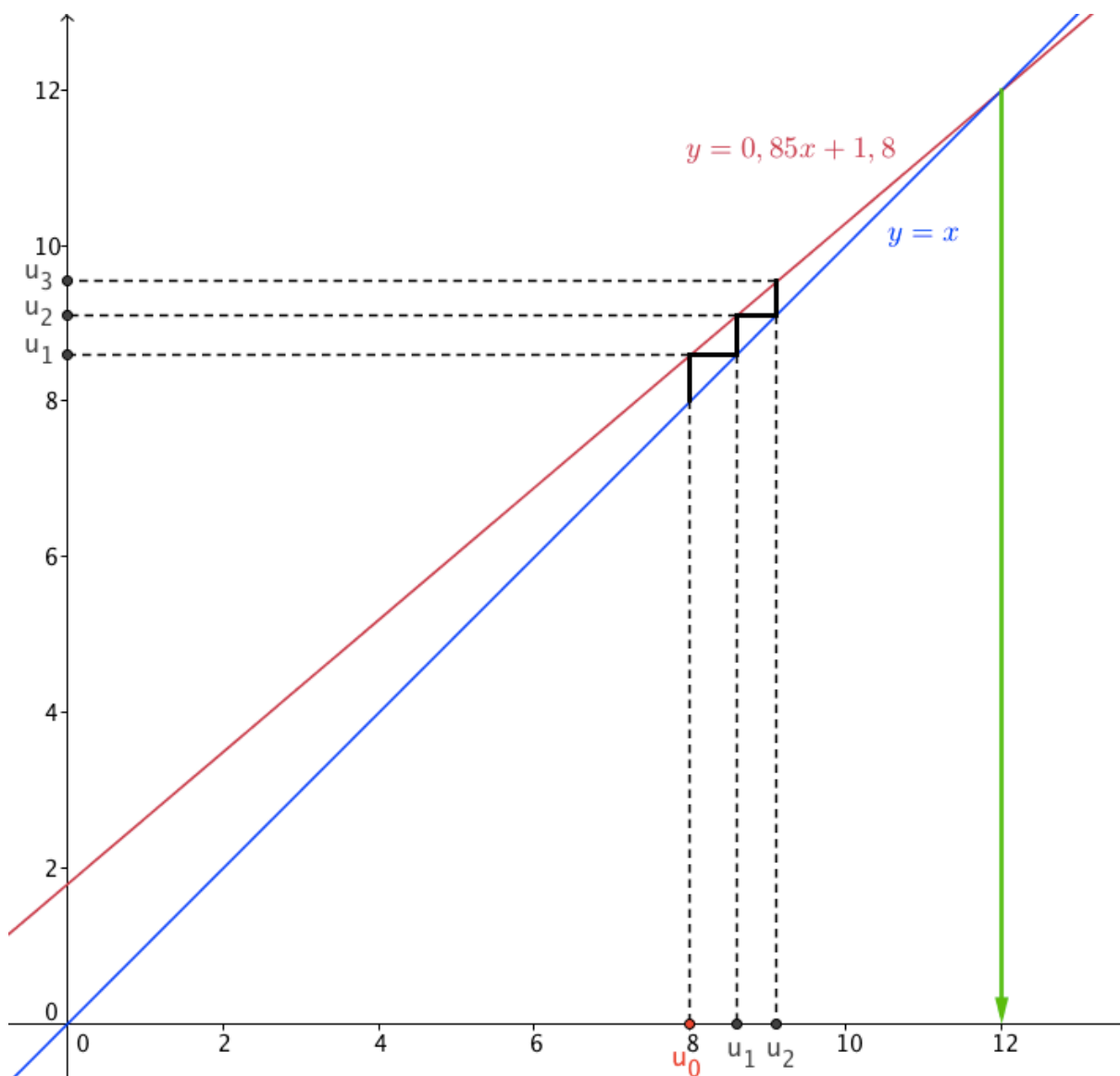
2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

1) a) $u_1 = f(u_0) = 0,85u_0 + 1,8 = 0,85 \times 8 + 1,8 = 8,6$

b) c) - On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses. On trace l'image de u_0 par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées $u_1 = f(u_0)$.

- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.

- On fait de même pour obtenir u_2 puis $u_3 \dots$



d) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

2) La suite (u_n) converge et la fonction f est continue sur \mathbb{R} . La limite L de la suite (u_n) est donc solution de l'équation $f(L) = L$.

$$\text{Soit : } 0,85L + 1,8 = L$$

$$L - 0,85L = 1,8$$

$$0,15L = 1,8$$

$$L = 1,8 : 0,15 = 12$$

Afficher la représentation graphique sur la calculatrice :

▶ Vidéo TI <https://youtu.be/bRlvVs9KZuk>

▶ Vidéo Casio <https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ>

▶ Vidéo HP <https://youtu.be/wML003kdLRo>



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales