LES SUITES – Chapitre 2/2

Partie 1 : Comportement à l'infini des suites géométriques

1) Rappel

Propriété : Soit (u_n) une **suite géométrique** de raison q et de premier terme u_0.
Alors, pour tout entier n, on a :
- $u_{n+1} = q \times u_n$ (forme de récurrence)
- $u_n = u_0 \times q^n$ (forme explicite).

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique de raison –3 et de premier terme 5.
On a : $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_n = 5 \times (-3)^n$.

2) Limites d'une suite géométrique

q	$0 \leq q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$	0	1	$+\infty$

Exemples :

$a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty \qquad b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \qquad c)\ \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + 0{,}5^n) = 1$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/F-PGmIK5Ypg
Vidéo https://youtu.be/2BueBAoPvvc

Déterminer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3} \qquad b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Correction

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ comme limite d'une suite géométrique de raison $2 > 1$.
Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3} = +\infty$$

$b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ avec $0 < \frac{1}{5} < 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/rlaYMXPbWE8

Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{13}$

Correction

$$\begin{aligned} S &= 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{13} \\ &= \frac{1 - 3^{14}}{1 - 3} \\ &= 2\,391\,484 \end{aligned}$$

4) Limite de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Méthode : Calculer la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/XTftGHfnYMw

Vidéo https://youtu.be/6QjMEzEn5X0

a) Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = 4$.
On note $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Calculer la limite de la suite (S_n).

Correction

a) On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $0 \leq \frac{1}{2} < 1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 2$.

b) $S_n = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$

$$\begin{aligned}&= 4+4\times 0{,}2+4\times 0{,}2^2+\cdots+4\times 0{,}2^n\\ &= 4(1+0{,}2+0{,}2^2+\cdots+0{,}2^n)\\ &= 4\times\frac{1-0{,}2^{n+1}}{1-0{,}2}\\ &= 5\times(1-0{,}2^{n+1})\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^{n+1} = 0$ comme limite d'une suite géométrique de raison 0,2 avec $0\leq 0{,}2<1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-0{,}2^{n+1} = 1$

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\times(1-0{,}2^{n+1}) = 5$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 5$.

Méthode : Modéliser un problème à l'aide d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/XcszOqP9sbk

Un entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30 % chaque mois.
a) Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.
b) Que peut-on penser de l'évolution de la somme total du capital investi dans un futur éloigné ?

Correction
a) On note (u_n) le capital injecté au n-ième mois alors $u_{n+1} = 0{,}7u_n$.
(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$ et de premier terme $u_0 = 20\,000$.
Le total du capital investi à la fin de la première année est :

$$\begin{aligned}S_n &= u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{11}\\ &= 20\,000+20\,000\times 0{,}7+20\,000\times 0{,}7^2+\cdots+20\,000\times 0{,}7^{11}\\ &= 20\,000\times(1+0{,}7+0{,}7^2+\cdots+0{,}7^{11})\\ &= 20\,000\times\frac{1-0{,}7^{12}}{1-0{,}7}\\ &\approx 65\,744\end{aligned}$$

b) Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.
En reprenant le principe des calculs effectués dans la question 1, on obtient :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_n$$
$$= 20\,000 \times \frac{1 - 0{,}7^{n+1}}{1 - 0{,}7}$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}7^{n+1} = 0$, comme limite d'une suite géométrique de raison 0,7 avec $0 \leq 0{,}7 < 1$.

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 20\,000 \times \frac{1 - 0{,}7^{n+1}}{1 - 0{,}7} = 20\,000 \times \frac{1}{1 - 0{,}7} = \frac{20\,000}{0{,}3} \approx 66\,666{,}67$$

Dans un futur éloigné, la somme totale du capital investi tend à se rapprocher de 66 666,67 €.

Partie 2 : Les suites arithmético-géométriques

1) Définition

Définition : Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite arithmético-géométrique

Vidéo https://youtu.be/6-vFnQ6TghM
Vidéo https://youtu.be/0CNt_fUuwEY
Vidéo https://youtu.be/EgYTH79sDfw

Un investisseur dépose 5 000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus.
On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ et $u_0 = 5\,000$.

a) Calculer u_1 et u_2.
b) Démontrer que la suite (c_n) définie pour tout entier n par $c_n = -10\,000$ vérifie la relation de récurrence de (u_n).
c) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - c_n$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
d) Exprimer v_n en fonction de n.
e) En déduire u_n en fonction de n. Puis calculer u_{10}.
f) Étudier les variations de (u_n).
g) Calculer la limite de (u_n).

Correction
a) $u_1 = 1{,}03u_0 + 300 = 5\,450$

$u_2 = 1{,}03u_1 + 300 = 5\ 913{,}5$

b) $1{,}03c_n + 300 = 1{,}03 \times (-10\ 000) + 300 = -10\ 300 + 300 = -10\ 000 = c_{n+1}$

c) $v_n = u_n - c_n = u_n + 10\ 000$, soit :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 10\ 000 \\ &= 1{,}03u_n + 300 + 10\ 000 \\ &= 1{,}03u_n + 10\ 300 \\ &= 1{,}03(v_n - 10\ 000) + 10\ 300, \text{ car } v_n = u_n + 10\ 000 \\ &= 1{,}03v_n - 10\ 300 + 10\ 300 \\ &= 1{,}03v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10\ 000 = 5\ 000 + 10\ 000 = 15\ 000$.

d) $v_n = 15\ 000 \times 1{,}03^n$.

e) $u_n = v_n - 10\ 000 = 15\ 000 \times 1{,}03^n - 10\ 000$
On a alors : $u_{10} = 15\ 000 \times 1{,}03^{10} - 10\ 000 \approx 10\ 158{,}75$

f)
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 15\ 000 \times 1{,}03^{n+1} - 10\ 000 - (15\ 000 \times 1{,}03^n - 10\ 000) \\ &= 15\ 000 \times (1{,}03^{n+1} - 1{,}03^n) \\ &= 15\ 000 \times 1{,}03^n \times (1{,}03 - 1) \\ &= 450 \times 1{,}03^n > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} 1{,}03^n = +\infty$, comme limite d'une suite géométrique de raison $1{,}03 > 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to\infty} 15\ 000 \times 1{,}03^n = +\infty$
Et donc : $\lim\limits_{n\to\infty} 15\ 000 \times 1{,}03^n - 10\ 000 = +\infty$ soit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

2) Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Théorème :
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors $f(L) = L$.

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Vidéo https://youtu.be/L7bBL4z-r90
Vidéo https://youtu.be/LDRx7aS9JsA (Cas d'une suite quelconque)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = 0{,}85x + 1{,}8$.
1) a) Calculer u_1.

b) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

c) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.

d) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

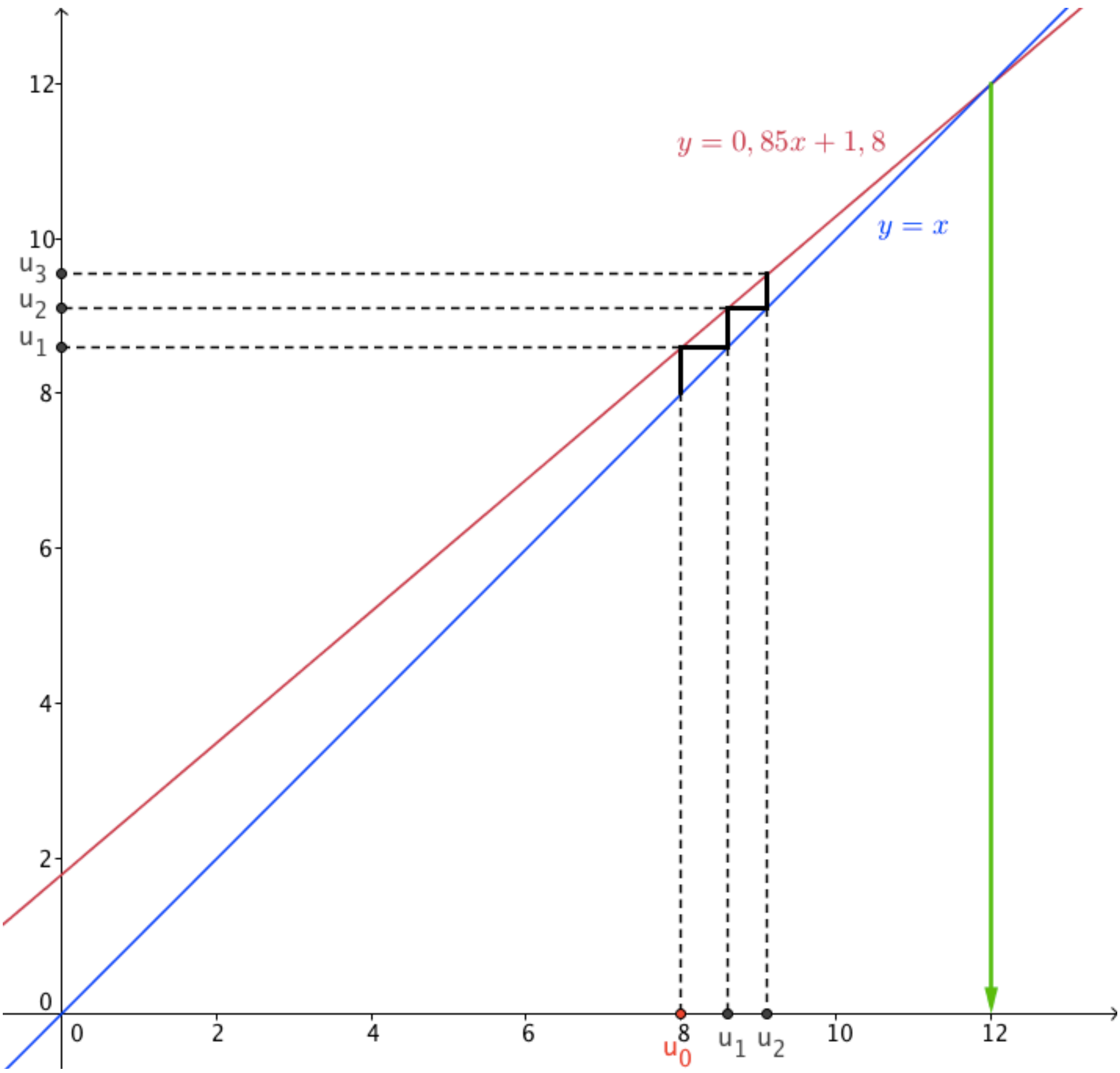
2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

Correction

1) a) $u_1 = f(u_0) = 0{,}85u_0 + 1{,}8 = 0{,}85 \times 8 + 1{,}8 = 8{,}6$

b) c) - On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses. On trace l'image de u_0 par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées $u_1 = f(u_0)$.

- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- On fait de même pour obtenir u_2 puis u_3…



d) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

2) La suite (u_n) converge et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. La limite L de la suite (u_n) est donc solution de l'équation $f(L) = L$.
Soit : $0,85L + 1,8 = L$
$L - 0,85L = 1,8$
$0,15L = 1,8$
$L = 1,8 : 0,15 = 12$

Afficher la représentation graphique sur la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/bRlvVs9KZuk

Vidéo Casio https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ

Vidéo HP https://youtu.be/wML003kdLRo