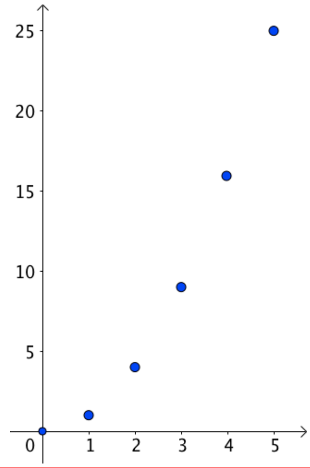
LES SUITES (Partie 1)

I. Limite d'une suite

1) Limite infinie



Exemple :
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite pourvu qu'on choisisse un rang n suffisamment grand.

Approche intuitive d'une limite infinie :
On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : Pour une limite égale à $-\infty$, on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel →

Langage naturel

Définir fonction seuil(A)
 	
n ← 0
u ← 2
 	
Tant que u < A
    n ← n + 1
    u ← 4u
Fin Tant que
 	
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 100, on obtient en sortie n = 3.
A partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

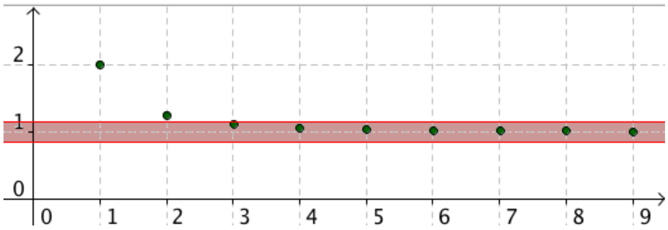
En langage calculatrice et Python, cela donne :

TI	CASIO	Python

PROGRAM:SEUIL
:Input A
:0→N
:2→U
:While U<A
:N+1→N
:4*U→U
:End
:Disp N
	======SEUIL
	"A="?→A↵
	0→N↵
	2→U↵
	While U<A↵
	N+1→N↵
	4×U→U↵
	WhileEnd↵
	N
		def seuil(a):
		    n=0
		    u=2
		    while u<a:
		        n=n+1
		        u=4*u
		    return(n)

2) Limite finie

Exemple : La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.
En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 pour des valeurs de n de plus en plus grandes.



Approche intuitive d'une limite finie :
On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si u_n est aussi proche de L que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.
Une telle suite est dite **convergente**.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque :
Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs –1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriétés :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

II. Opérations sur les limites

Vidéo https://youtu.be/v7hD6s3thp8

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = +\infty$

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3) = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+3) = +\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3) = +\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L\neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = ?$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2-3 = -\infty$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = 0$

Remarque :
Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs. Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudrait utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty", "0\times\infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une indétermination - NON EXIGIBLE -

Vidéo https://youtu.be/9fEHRHdbnwQ

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

a) • $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n+1=-\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de pus haut degré :

$$n^2-5n+1=n^2\left(1-\frac{5n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)=n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}=1$ par limite d'une somme.

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty$ par limite d'un produit.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1=+\infty$.

b) • $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$".

• Levons l'indétermination par la méthode de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

• Or par limite d'une somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}+\sqrt{n}=+\infty$

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$ par limite d'un quotient.

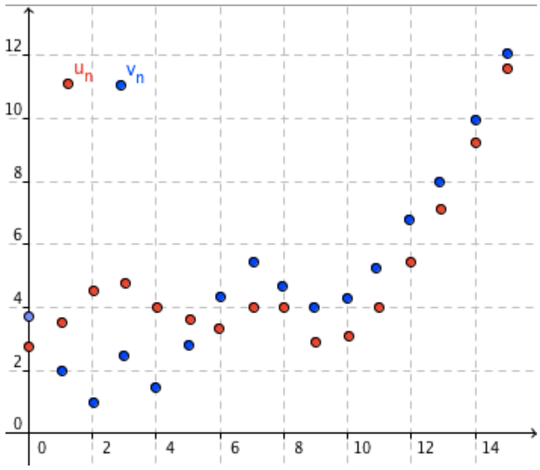
Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}=0$.

III. Limites et comparaison

1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.



Théorème 2 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

Vidéo https://youtu.be/iQhh46LupN4

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n$

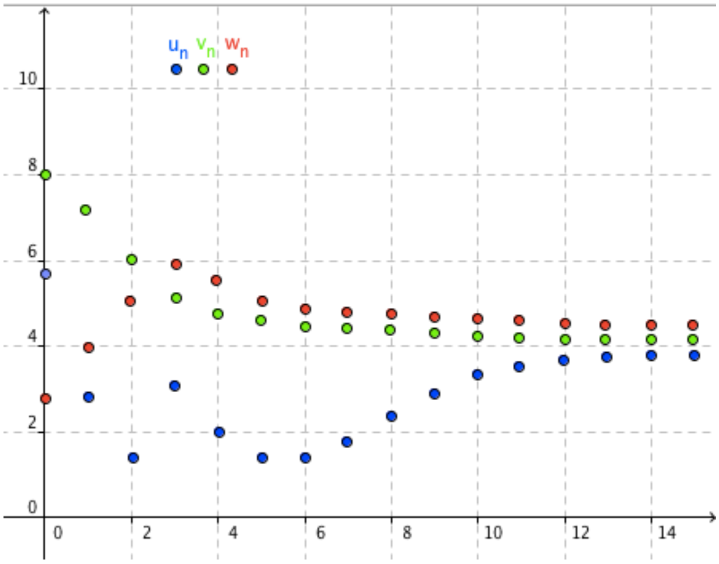
$(-1)^n \geq -1$ donc $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$.

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Méthode : Déterminer une limite par encadrement

Vidéo https://youtu.be/OdzYjz_vQbw

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{\sin n}{n}$

On a : $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc : $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{\sin n}{n} = 1$.