PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Tout le cours sur les primitives en vidéo : https://youtu.be/LIm3DN63bxQ
Tout le cours sur les équations différentielles en vidéo : https://youtu.be/qHF5kiDFkW8

Partie 1 : Primitive d'une fonction

1) Définition et propriétés

Exemple :
On considère les fonctions f et F définies par : $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$
Si on dérive F, on constate que : $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
Lorsque $F' = f$, on dit que F est une primitive de f.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f, une fonction F, telle que : $F' = f$.

Remarque :
Dans ces conditions, dire que « F est une primitive de f »
revient à dire que « f est la dérivée de F ».

Méthode : Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

Vidéo A venir

Dans chaque cas, dire si F est une primitive de f.
a) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f(x) = x$.
b) $F(x) = xe^x$ et $f(x) = e^x(x + 1)$.
c) $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $f(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$.

Correction

a) $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$
Donc F est une primitive de f.

b) $F'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = e^x(x + 1) = f(x)$
Donc F est une primitive de f.

c) $F'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \neq f(x)$
Donc F n'est pas une primitive de f.

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration :

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.
La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.
On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I.
On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de f.

Démonstration :
F est une primitive de f.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.
Donc G est une primitive de f.

Exemple :
On a vu dans la méthode précédente que F est une primitive de f avec :
$F(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f(x) = x$.
Donc, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ est également une primitive de f.
En effet : $G'(x) = \frac{2x}{2} + 0 = x = f(x)$.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Vidéo https://youtu.be/-q9M7oJ9gkI

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

a) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.
b) Déterminer la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

Correction

1) $F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x)$.
Donc $F' = f$ et donc la fonction F est une primitive de f.

2) On cherche la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$.

Si G est une primitive de f alors : $G(x) = F(x) + C$, où C est un nombre réel.
Donc : $G(1) = F(1) + C$

Et donc : $F(1) + C = 0$
Soit : $\frac{e^{2\times1}}{1} + C = 0$
$e^2 + C = 0$
$C = -e^2$
La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :
$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	**Une primitive F**
$a,\ a \in \mathbb{R}$	ax
x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$ Avec $x > 0$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x

3) Linéarité des primitives

Propriété :
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g alors :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf, avec k réel.

Démonstrations :
- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

Méthode : Déterminer une primitive (1)

Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw
Vidéo https://youtu.be/82HYI4xuClw
Vidéo https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = x^3 - 2$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{3}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Correction

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{3}{x}$

c) $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$
$F(x) = 3\ln(x)$

Remarque : L'intervalle de recherche de la primitive est $]0\,;\,+\infty[$, car la fonction ln est définie pour des valeurs strictement positives.

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{x}}$
$F(x) = 2 \times 2\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$

4) Primitives de fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive
$2u'u$	u^2
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$\ln(u)$

Méthode : Déterminer une primitive (2)

Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$

b) $f(x) = xe^{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$

Correction

a) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)$

$= \frac{1}{2} \times 2(2x-5)(x^2-5x+4)$ du type $2u'u$

En effet : $u(x) = x^2-5x+4 \rightarrow u'(x) = 2x-5$.

Une primitive de $2u'u$ est de la forme u^2.

Soit : $F(x) = \frac{1}{2}(x^2-5x+4)^2$

b) $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$ du type $u'e^u$

En effet : $u(x) = x^2 \rightarrow u'(x) = 2x$.

Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u.

Soit : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1} = \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{x^3+1}$ du type $\frac{u'}{u}$

En effet : $u(x) = x^3+1 \rightarrow u'(x) = 3x^2$

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est de la forme $\ln(u)$.

Soit : $F(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)$

Partie 2 : Équations différentielles

1) Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemples :

a) L'équation $f'(x) = 5$ est une équation différentielle.
L'inconnue est la fonction f.
En considérant que y est la fonction inconnue qui dépend de x, l'équation peut se noter :
$y' = 5$

b) L'équation $y' = 2x^2 - 3$ est également une équation différentielle.
L'inconnue est la fonction y dont la dérivée est égale à $2x^2-3$.

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
La fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ si et seulement si $g'(x) = f(x)$.

Propriété :
Dire que F est une primitive de f, revient à dire que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

En effet, $F' = f$.

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Vidéo https://youtu.be/LX8PxR-ScfM

Prouver que la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Correction

$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$

Donc, g est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

3) Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
Donc $f'(x) = af(x)$.
f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x)$.
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
Ainsi : $g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x)$
$= -e^{-ax} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0$.
La fonction g est donc égale à une constante réelle C, soit :
$e^{-ax} \times f(x) = C$.
Et donc : $f(x) = C \times \frac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

Vidéo https://youtu.be/YJNHTq85tJA

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.
1) a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.
b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.
2) Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = 2$.

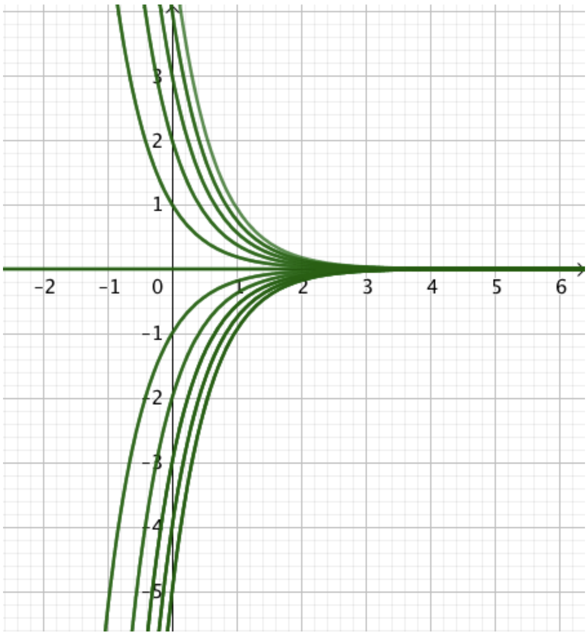
Correction
1) a) $3y' + 5y = 0$

$$3y' = -5y$$

$$y' = -\frac{5}{3}y$$

Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C, on obtient :



2) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$
Donc $f(1) = Ce^{-\frac{5}{3}\times 1} = Ce^{-\frac{5}{3}}$
Or, $f(1) = 2$.

Donc : $Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$

$$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$$

$$C = \frac{2}{e^{-\frac{5}{3}}}$$

$$C = 2e^{\frac{5}{3}}$$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{5}{3}}\, e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :
- $(f+g)' = f' + g' = af + ag = a(f+g)$
- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

4) Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.

Or, $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.

Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.

g est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \underbrace{Ce^{ax}}_{\text{Solutions de l'équation } y' = ay} \underbrace{-\frac{b}{a}}_{\text{Solution particulière constante de l'équation } y' = ay + b}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Vidéo https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg

Vidéo https://youtu.be/CFZr44vny3w

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 3$.

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation différentielle (E).

b) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$.

c) En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).

d) Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = -1$.

Correction

a) Modifions l'écriture de l'équation différentielle :

$2y' - y = 3$

$2y' = y + 3$

$y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$

Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto -3$.

En effet : $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$.

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

c) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 3, C \in \mathbb{R}$$

d) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3, C \in \mathbb{R}$

Donc $f(0) = Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = C - 3$

Or, $f(0) = -1$

Donc : $C - 3 = -1$

$C = 3 - 1$

$C = 2$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$