PRIMITIVES ET

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

 **Tout le cours sur les primitives en vidéo :** [**https://youtu.be/LIm3DN63bxQ**](https://youtu.be/LIm3DN63bxQ)

 **Tout le cours sur les équations différentielles en vidéo :** [**https://youtu.be/qHF5kiDFkW8**](https://youtu.be/qHF5kiDFkW8)

**Partie 1 : Primitive d'une fonction**

1) Définition et propriétés

Exemple :

On considère les fonctions et définies par : et

Si on dérive , on constate que : .

Lorsque , on dit que est une primitive de .

Définition : est une fonction continue sur un intervalle .

On appelle **primitive** de , une fonction , telle que :

Remarque :

Dans ces conditions, dire que « est une primitive de »

revient à dire que «  est la dérivée de ».

Méthode : Vérifier qu’une fonction est une primitive d’une autre fonction

 **Vidéo** **A venir**

Dans chaque cas, dire si est une primitive de .

a) et .

b) et .

c) et .

**Correction**

a)

Donc est une primitive de .

b)

Donc est une primitive de .

c)

Donc n’est pas une primitive de .

Propriété : Deux primitives d’une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d’une constante.

Démonstration :

Soit et deux primitives de la fonction sur .
Alors : et .
Donc : , soit , soit encore .
La fonction possède une dérivée nulle sur , elle est donc constante sur .
On nomme cette constante. Ainsi : pour tout de .

On en déduit que les deux primitives de diffèrent d’une constante.

Propriété : est une fonction continue sur un intervalle .

Si est une primitive de alors pour tout réel, la fonction est une primitive de .

Démonstration :

est une primitive de .

On pose .

.

Donc est une primitive de .

Exemple :

On a vu dans la méthode précédente que est une primitive de avec :

 et .

Donc, la fonction définie par est également une primitive de .

En effet :

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d’une primitive particulière

 **Vidéo** **https://youtu.be/-q9M7oJ9gkI**

Soit la fonction définie sur ℝ\* par .

a) Démontrer que la fonction définie sur ℝ\* par est une primitive de *.*

b) Déterminer la primitive de la fonction qui s’annule en .

**Correction**

1) .

Donc et donc la fonction est une primitive de *.*

2) On cherche la primitive de la fonction qui s’annule en , soit : .

Si est une primitive de alors : où est un nombre réel.

Donc :

Et donc :

Soit :

La primitive de la fonction qui s’annule en est telle que :

 2) Primitives des fonctions usuelles

|  |  |
| --- | --- |
| **Fonction**  | **Une primitive**  |
| ,  |  |
| avec  |  |
|   |   |
|  Avec  |   |
|   |  |
|  |  |

 3) Linéarité des primitives

Propriété :

Si est une primitive de et est une primitive de alors :

- est une primitive de ,

- est une primitive de avec réel.

Démonstrations :

-

-

Méthode : Déterminer une primitive (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/GA6jMgLd\_Cw**](https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/82HYI4xuClw**](https://youtu.be/82HYI4xuClw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ**](https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ)

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction .

a) b)

c) sur d)

**Correction**

a)

b) donc

c)

Remarque : L’intervalle de recherche de la primitive est , car la fonction est définie pour des valeurs strictement positives.

d)

 4) Primitives de fonctions composées

 est une fonction dérivable sur un intervalle I.

|  |  |
| --- | --- |
| **Fonction** | **Une primitive** |
|  |  |
|  |  |
| avec  |  |

Méthode : Déterminer une primitive (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iiq6eUQee9g**](https://youtu.be/iiq6eUQee9g)

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction .

a) b) c)

**Correction**

a)

 du type

En effet : .

Une primitive de est de la forme .

Soit :

b) du type

En effet : .

Une primitive de est de la forme .

Soit :

c) du type

En effet :

Une primitive de est de la forme .

Soit :

**Partie 2 : Équations différentielles**

 1) Définition d’une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l’inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemples :

a) L’équation est une équation différentielle.

L’inconnue est la fonction .

En considérant que est la fonction inconnue qui dépend de , l’équation peut se noter :

b) L’équation est également une équation différentielle.

L’inconnue est la fonction dont la dérivée est égale à .

 2) Équation différentielle du type

Définition : Soit une fonction définie sur un intervalle .

La fonction est une **solution** de l’équation différentielle si et seulement si

.

Propriété :

Dire que est une primitive de , revient à dire que est une solution de l’équation différentielle .

En effet, .

Méthode : Vérifier qu’une fonction est solution d’une équation différentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/LX8PxR-ScfM**](https://youtu.be/LX8PxR-ScfM)

Prouver que la fonction définie sur par est solution de l’équation différentielle .

**Correction**

Donc, est solution de l’équation différentielle .

 3) Équations différentielles du type

Propriété : Les solutions de l’équation différentielle , , sont les fonctions de la forme , où est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

• Soit la fonction définie sur par , où est un réel.
Alors, *.*

Donc .

 est donc solution de l’équation différentielle .

• Réciproquement, soit une solution de l’équation différentielle .

Et soit la fonction définie sur par .
 est dérivable sur et on a : .

Comme est solution de l’équation différentielle , on a : .
Ainsi :

La fonction est donc égale à une constante réelle , soit :

.

Et donc : .

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YJNHTq85tJA**](https://youtu.be/YJNHTq85tJA)

On considère l’équation différentielle .

1) a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l’équation.

 b) Représenter à l’aide de la calculatrice ou d’un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2) Déterminer l’unique solution telle que .

**Correction**

1) a)

Les solutions sont les fonctions de la forme : , .

b) Pour différentes valeurs de , on obtient :



2) est solution de l’équation différentielle, donc de la forme :

Donc

Or, .

Donc :

Et donc :

Propriété : Si et sont deux solutions de l’équation différentielle , , alors  et sont également solutions de l’équation différentielle.

Démonstrations :

-

-

 4) Équations différentielles du type

Propriété : La fonction est solution de l’équation différentielle

 (). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : . Alors

Or,

Donc :

 est donc solution de l’équation différentielle

Propriété : Les solutions de l’équation différentielle (sont les fonctions de la forme , où .

Solutions de l’équation Solution particulière

 constante de l’équation

Remarque : L’équation est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/F\_LQLZ8rUhg**](https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/CFZr44vny3w**](https://youtu.be/CFZr44vny3w)

On considère l’équation différentielle .

a) Déterminer une solution particulière constante de l’équation différentielle .

b) Déterminer la forme générale des solutions de l’équation différentielle .

c) En déduire la forme générale des solutions de l’équation différentielle .

d) Déterminer l’unique solution de telle que .

**Correction**

a) Modifions l’écriture de l’équation différentielle :

Une solution particulière constante est la fonction : .

En effet : .

b) Les solutions de l’équation différentielle sont de la forme : , .

c) Les solutions de l’équation différentielle sont de la forme :

,

d) est solution de l’équation différentielle, donc de la forme : ,

Donc

Or,

Donc :

Et donc :

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)