PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Tout le cours sur les primitives en vidéo : https://youtu.be/bQ-eS1zZCdw
Tout le cours sur les équations différentielles en vidéo : https://youtu.be/qHF5kiDFkW8

Partie 1 : Primitive d'une fonction

1) Définition et propriétés

Exemple :
On considère les fonctions f et F définies par : $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$
Si on dérive F, on constate que : $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
Lorsque $F' = f$, on dit que F est une primitive de f.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f, une fonction F, telle que : $F' = f$.

Remarque :
Dans ces conditions, dire que « F est une primitive de f »
revient à dire que « f est la dérivée de F ».

Méthode : Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

Vidéo https://youtu.be/7tQqY9Vkmss

Dans chaque cas, dire si F est une primitive de f.
a) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f(x) = x$.
b) $F(x) = xe^x$ et $f(x) = e^x(x + 1)$.
c) $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $f(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$.

Correction

a) $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$
Donc F est une primitive de f.

b) $F'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = e^x(x + 1) = f(x)$
Donc F est une primitive de f.

c) $F'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \neq f(x)$
Donc F n'est pas une primitive de f.

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/oloWk2F4bI8

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.
La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.
On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I.
On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de f.

Démonstration :
F est une primitive de f.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.
Donc G est une primitive de f.

Exemple :
On a vu dans la méthode précédente que F est une primitive de f avec :
$F(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f(x) = x$.
Donc, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ est également une primitive de f.
En effet : $G'(x) = \frac{2x}{2} + 0 = x = f(x)$.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Démontrée dans le chapitre Intégration -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Vidéo https://youtu.be/-q9M7oJ9gkI

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

a) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.

b) Déterminer la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

Correction

a) $F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x)$.

Donc $F' = f$ et donc la fonction F est une primitive de f.

b) On cherche la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$.

Si G est une primitive de f alors : $G(x) = F(x) + C$, où C est un nombre réel.

Donc : $G(1) = F(1) + C$

Et donc : $F(1) + C = 0$

Soit : $\frac{e^{2\times 1}}{1} + C = 0$

$e^2 + C = 0$

$C = -e^2$

La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :

$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	**Une primitive F**
$a, \; a \in \mathbb{R}$	ax
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

3) Linéarité des primitives

Propriété :

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf, avec k réel.

Démonstrations :

- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

Méthode : Déterminer une primitive (1)

Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw
Vidéo https://youtu.be/82HYI4xuClw
Vidéo https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x)=x^3-2$ b) $f(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}$ c) $f(x)=\frac{1}{x^5}$

d) $f(x)=\frac{3}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ e) $f(x)=-\sin(x)$ f) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$

Correction

a) $F(x)=\frac{1}{4}x^4-2x$

b) $f(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=3x^2-3\times\frac{1}{x^2}$ donc $F(x)=x^3-3\times\left(-\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{3}{x}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^5}=x^{-5}$
$F(x)=\frac{1}{-4}x^{-4}=-\frac{1}{4x^4}$

d) $f(x)=\frac{3}{x}=3\times\frac{1}{x}$
$F(x)=3\ln(x)$

Remarque : L'intervalle de recherche de la primitive est $]0\,;\,+\infty[$, car la fonction ln est définie pour des valeurs strictement positive.

e) $f(x)=-\sin(x)$
$F(x)=-(-\cos(x))=\cos(x)$

f) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}=2\times\frac{1}{\sqrt{x}}$
$F(x)=2\times 2\sqrt{x}=4\sqrt{x}$

4) Primitives de fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	**Une primitive**
$u'u^n$ avec $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ avec $u>0$	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Méthode : Déterminer une primitive (2)

Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $f(x) = x^2e^{x^3}$

d) $f(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1)$

Correction

a) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ du type $u'u^n$, avec $n = 2$.
En effet : $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$
Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$
Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-5x+4)^3$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.
En effet : $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 2x$
Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$.
Soit : $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = x^2e^{x^3} = \frac{1}{3} \times 3x^2e^{x^3}$ du type $u'e^u$.
En effet : $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$.
Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u.
Soit : $F(x) = \frac{1}{3} \times e^{x^3}$

d) $f(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1) = \frac{1}{5} \times 5\cos(5x) - 3\sin(3x-1)$
Donc $F(x) = \frac{1}{5} \times \sin(5x) + \cos(3x-1)$

Partie 2 : Équations différentielles

1) Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemples :
a) L'équation $f'(x) = 5$ est une équation différentielle.
L'inconnue est la fonction f.
En considérant que y est la fonction inconnue qui dépend de x, l'équation différentielle peut se noter : $y' = 5$

b) L'équation $y' = 2x^2 - 3$ est également une équation différentielle.
L'inconnue est la fonction y dont la dérivée est égale à $2x^2 - 3$.

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
La fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ si et seulement si $g'(x) = f(x)$.

Propriété :
Dire que F est une primitive de f, revient à dire que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

En effet, $F' = f$.

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Vidéo https://youtu.be/LX8PxR-ScfM

Prouver que la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Correction

$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$

Donc, g est solution de l'équation différentielle : $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

3) Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/FQlxi8JKmg4

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
Donc $f'(x) = af(x)$.
f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x)$.
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
Ainsi : $g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x)$

$= -e^{-ax} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0.$
La fonction g est donc égale à une constante réelle C, soit :
$e^{-ax} \times f(x) = C.$
Et donc : $f(x) = C \times \frac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}.$

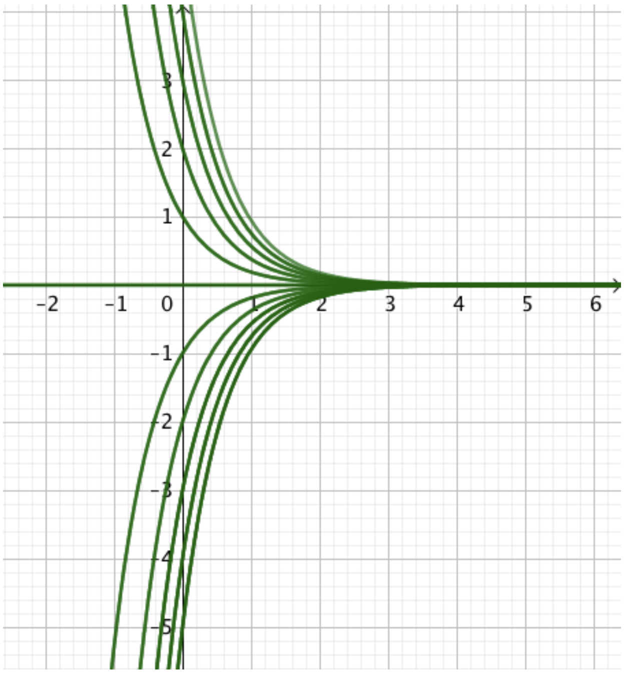
Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

Vidéo https://youtu.be/YJNHTq85tJA

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.
1) a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.
b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.
2) Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = 2$.

Correction
1) a) $3y' + 5y = 0$
$3y' = -5y$
$y' = -\frac{5}{3}y$
Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C, on obtient :



2) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$
Donc $f(1) = Ce^{-\frac{5}{3}\times 1} = Ce^{-\frac{5}{3}}$
Or, $f(1) = 2$.

Donc : $Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$

$$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$$
$$C = \frac{2}{e^{-\frac{5}{3}}}$$
$$C = 2e^{\frac{5}{3}}$$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{5}{3}}\, e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :
- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$
- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

4) Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$. Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :
On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.
Or, $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.
Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.
g est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solutions de l'équation
$y' = ay$

Solution particulière
constante de l'équation
$y' = ay + b$

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Vidéo https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg
Vidéo https://youtu.be/CFZr44vny3w

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.
b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

Correction
a) $2y' - y = 3$
$2y' = y + 3$
$y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$

● Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto -3$.
En effet : $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$.

● Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

● Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ sont donc de la forme :
$$x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 3,\ C \in \mathbb{R}$$

b) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$
Donc $f(0) = Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = C - 3$
Or, $f(0) = -1$

Donc : $C - 3 = -1$
$C = 3 - 1$
$C = 2$
Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

5) Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : f est une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions de la forme :
$$x \longmapsto Ce^{ax} + p(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solutions de l'équation $y' = ay$

Solution particulière de l'équation $y' = ay + f$

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

Vidéo https://youtu.be/QeGvVncvyLc

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.
a) Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.
b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Correction

a) $p'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$

Donc : $p'(x) - 2p(x) = -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2}$

$= x^2$

On a donc : $p'(x) - 2p(x) = x^2$

La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont de la forme $x \longmapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$ sont les fonctions de la forme :

$f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $C \in \mathbb{R}$.