ÉQUATIONS POLYNOMIALES

I. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition : Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$.
On appelle **discriminant** du trinôme $az^2 + bz + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété :
- Si $\Delta > 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a une unique solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration :
On met le trinôme sous sa forme canonique (Voir cours de la classe de 1ère) :

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \quad (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Si $\Delta > 0$:

$$z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad ou \quad z + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad ou \quad z = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

L'équation a deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: L'équation peut s'écrire :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation peut s'écrire :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = i^2\frac{-\Delta}{4a^2} \quad (car\ i^2=-1)$$

Donc :

$$z+\frac{b}{2a} = i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \quad ou \quad z+\frac{b}{2a} = -i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \quad \left(car\ \frac{-\Delta}{4a^2}>0\right)$$

$$z=\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a} \quad ou \quad z=-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}$$

L'équation a deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Méthode : Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Vidéo https://youtu.be/KCnorHy5FE4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $z^2+5=0$ b) $z^2+3z+4=0$

a) $z^2+5=0$
$z^2=-5$
$z^2=5i^2$
Donc : $z=i\sqrt{5}$ ou $z=-i\sqrt{5}$

Les solutions sont donc $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

b) $z^2+3z+4=0$
On calcule de discriminant Δ du trinôme : $\Delta = 3^2-4\times1\times4=-7$

$\Delta<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-3+i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-3-i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme az^2+bz+c sont donnés par : $S=-\frac{b}{a}$ et $P=\frac{c}{a}$.

Exemple :
On a vu dans la méthode précédente que l'équation $z^2+5=0$ possède deux racines : $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.
Ainsi : $S=i\sqrt{5}-i\sqrt{5}=0$ et $P=i\sqrt{5}\times\left(-i\sqrt{5}\right)=5$

En appliquant, les formules de la propriété, on retrouve ces résultats :
$S=-\frac{0}{1}=0\ \ et\ \ P=\frac{5}{1}=5.$

II. Équations de degré n dans $\mathbb{C}$

1) Définition

Définition : Une **fonction polynôme** (ou **polynôme**) P est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, où a_0, a_1, a_2, …, a_n sont les **coefficients** réels de P.
L'entier n est appelé le **degré** du polynôme P.

Propriété : Si une fonction polynôme est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

2) Racine d'un polynôme

Définition : Soit un polynôme P. Un nombre complexe a s'appelle **racine** de P si $P(a) = 0$.

Exemple :
Les nombres complexes i et $-i$ sont les racines du polynôme $z^2 + 1$.

Théorème : Soit un polynôme P définie par $P(z) = z^n - a^n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$, tel que $P(z) = (z-a)Q(z)$

Démonstration au programme :
- Si $a = 0$: C'est évident.
- Si $a = 1$:

On a : $z(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1) = z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z$
$1(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1) = z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1$

En soustrayant membre à membre, on a :
$$(z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1) = z^n - 1$$
- Si $a \neq 0$ quelconque :

On remplace z par z/a dans l'égalité ci-dessus :
$$\left(\frac{z}{a} - 1\right)\left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{z^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{z^{n-3}}{a^{n-3}} + \cdots + \frac{z}{a} + 1\right) = \frac{z^n}{a^n} - 1$$
Soit en multipliant chaque membre par a^n :
$$(z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \cdots + a^{n-2} z + a^{n-1}) = z^n - a^n$$
Il existe donc un polynôme $Q(z) = z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \cdots + a^{n-2} z + a^{n-1}$ de degré $n-1$, tel que $P(z) = (z-a)Q(z)$.

Corollaire : Soit un polynôme P de degré n. Si a est une racine complexe de P, alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$, tel que $P(z) = (z-a)Q(z)$.

Démonstration au programme :
Comme a est une racine complexe de P, on a : $P(a) = 0$.
Donc :
$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n - P(a) \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n - a_0 - a_1 a - a_2 a^2 - \cdots - a_n a^n \end{aligned}$$

$= a_1(z-a) + a_2(z^2 - a^2) + \cdots + a_n(z^n - a^n)$
Or, pour tout k compris entre 1 et n, il existe un polynôme Q_{k-1} de degré $k-1$, tel que : $z^k - a^k = (z-a)Q_{k-1}(z)$.

Donc : $P(z) = a_1(z-a)Q_0(z) + a_2(z-a)Q_1(z) + \cdots + a_n(z-a)Q_{n-1}(z)$
$= (z-a)\left(a_1Q_0(z) + a_2Q_1(z) + \cdots + a_nQ_{n-1}(z)\right)$

Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$, tel que : $P(z) = (z-a)Q(z)$.

Corollaire : Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Démonstration au programme :

Supposons que les nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des racines deux à deux distincts du polynôme P.
Alors il existe un polynôme Q_1 tel que : $P(z) = (z-\alpha_1)Q_1(z)$.
Or, $0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)Q_1(\alpha_2)$ et $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$.
Donc $Q_1(\alpha_2) = 0$.
Ainsi, il existe un polynôme Q_2 tel que : $Q_1(z) = (z-\alpha_2)Q_2(z)$.
Et donc : $P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)Q_2(z)$.
En continuant ainsi avec des polynômes $Q_3, Q_4, \ldots Q_p$, on obtient :

$$P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_p)Q_p(z).$$

On en déduit que le polynôme P est de degré $p + degré(Q_p) \geq p$.

Méthode : Factoriser un polynôme dont une racine est connue

Vidéo https://youtu.be/1Y-Jtl6nNXU

Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme : $P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$.

P est un polynôme de degré 3, il admet au plus 3 racines.
On cherche une racine évidente de P en testant des valeurs entières « autour de 0 ».
Il sera ensuite aisé de déterminer la ou les autres racines qui sont au plus au nombre de 2.
On constate que $z = -1$ est une racine évidente de P :

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 0$$

Donc, il existe un polynôme Q de degré 2, tel que : $P(z) = (z+1)Q(z)$.

On a donc :
$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z+1)Q(z)$
$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z+1)(az^2 + bz + c)$
$z^3 + z^2 + 4z + 4 = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$
$z^3 + z^2 + 4z + 4 = az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 \\ c + b = 4 \\ c = 4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

On en déduit que : $Q(z) = z^2 + 4$.
Or, il est possible de factoriser Q :

$Q(z) = z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$
En effet : $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i$

On a ainsi : $P(z) = (z + 1)(z - 2i)(z + 2i)$.

Méthode : Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.

Vidéo https://youtu.be/KqghKmQ9gOk

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.

On pose $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.
On voit que $x = 1$ est une racine évidente de P. Donc il existe un polynôme Q, de degré 2, tel que : $P(x) = (x - 1)Q(x)$.

On a donc :
$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x - 1)Q(x)$
$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
$x^3 + x^2 - 3x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
$x^3 + x^2 - 3x + 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$
Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -3 \\ -c = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc : $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 1)$.

L'équation $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ peut s'écrire $(x - 1)(x^2 + 2x - 1) = 0$.
Soit : $x - 1 = 0$ ou $x^2 + 2x - 1 = 0$
$x = 1$ $\qquad \Delta = 8$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

ou $x = -1 + \sqrt{2}$

$$S = \{-1 - \sqrt{2}\,;\, -1 + \sqrt{2}\,;\, 1\}$$