ÉQUATIONS POLYNOMIALES

**Partie 1 : Équations du second degré dans** $C$

Définition : Soit $a$, $b$ et *c* des réels avec $a\ne 0$ et $z$ un nombre complexe.

On appelle **discriminant** du trinôme $az^{2}+bz+c$, le nombre réel, noté $Δ$, égal à

$b^{2}-4ac$.

Propriété :

- Si $Δ$ > 0 : L'équation $az^{2}+bz+c=0$ a deux solutions réelles distinctes :

 $z\_{1}=$ $\frac{-b+\sqrt{Δ}}{2a}$ et $z\_{2}=$ $\frac{-b-\sqrt{Δ}}{2a}$.

- Si $Δ$ = 0 : L'équation $az^{2}+bz+c=0$ a une unique solution réelle : $z\_{0}=-$ $\frac{b}{2a}$.

- Si $Δ$ < 0 : L'équation $az^{2}+bz+c=0$ a deux solutions complexes conjuguées :

 $z\_{1}=$ $\frac{-b+i\sqrt{-Δ}}{2a}$ et $z\_{2}=$ $\frac{-b-i\sqrt{-Δ}}{2a}$.

Démonstration :

On met le trinôme sous sa forme canonique (Voir cours de la classe de 1ère) :

$$az^{2}+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{b^{2}-4ac}{4a}$$

En posant $Δ=b^{2}-4ac$ :

$$az^{2}+bz+c=0$$

$$⟺a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^{2}=\frac{Δ}{4a} \left(a\ne 0\right)$$

$$⟺\left(z+\frac{b}{2a}\right)^{2}=\frac{Δ}{4a^{2}} $$

- Si $Δ$ > 0 :

$$z+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{Δ}{4a^{2}}} ou z+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{Δ}{4a^{2}}}$$

$$z=\frac{\sqrt{Δ}}{2a}-\frac{b}{2a} ou z=-\frac{\sqrt{Δ}}{2a}-\frac{b}{2a}$$

L'équation a deux solutions réelles : $z\_{1}=$ $\frac{-b+\sqrt{Δ}}{2a}$ et $z\_{2}=$ $\frac{-b-\sqrt{Δ}}{2a}$.

- Si $Δ$ = 0 : L'équation peut s'écrire :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^{2}=0$$

L'équation n'a qu'une seule solution réelle : $z\_{0}=-$ $\frac{b}{2a}$.

- Si $Δ$ < 0 : L'équation peut s'écrire :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^{2}=i^{2}\frac{-Δ}{4a^{2}} (car i^{2}=-1)$$

 Donc :

$$z+\frac{b}{2a}=i\sqrt{\frac{-Δ}{4a^{2}}} ou z+\frac{b}{2a}=-i\sqrt{\frac{-Δ}{4a^{2}}} (car \frac{-Δ}{4a^{2}}>0)$$

$$z=\frac{i\sqrt{-Δ}}{2a}-\frac{b}{2a} ou z=-\frac{i\sqrt{-Δ}}{2a}-\frac{b}{2a}$$

L'équation a deux solutions complexes : $z\_{1}=$ $\frac{-b+i\sqrt{-Δ}}{2a}$ et $z\_{2}=$ $\frac{-b-i\sqrt{-Δ}}{2a}$.

Méthode : Résoudre une équation du second degré dans $C$

 **Vidéo** [**https://youtu.be/KCnorHy5FE4**](https://youtu.be/KCnorHy5FE4)

Résoudre dans $C$ les équations suivantes : a) $z^{2}+5=0$ b) $z^{2}+3z+4=0$

**Correction**

a) $z^{2}+5=0$

 $z^{2}=-5$

 $z^{2}=5i^{2}$

Donc : $z=i\sqrt{5}$ ou $z=-i\sqrt{5}$

Les solutions sont donc $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

b) 

On calcule de discriminant $Δ$ du trinôme : $Δ=3^{2}-4×1×4=-7$

$Δ<0 $ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z\_{1}=$ $\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$ et $z\_{2}=$ $\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$

$$ =-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i =-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Propriété : La somme S et le produit P des racines d’un polynôme du second degré de la forme $az^{2}+bz+c$ sont donnés par : $S=-$ $\frac{b}{a}$ et $P=$ $\frac{c}{a}$.

Exemple :

On a vu dans la méthode précédente que l’équation $z^{2}+5=0$ possède deux racines : $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

Ainsi : $S=$ $i\sqrt{5}$ $-i\sqrt{5}=0$ et $P=i\sqrt{5}×\left(-i\sqrt{5}\right)=5$

En appliquant, les formules de la propriété, on retrouve ces résultats :

$$S=-\frac{0}{1}=0 et P=\frac{5}{1}=5.$$

**Partie 2 : Équations de degré n dans** $C$

 1) Définition

Définition : Une **fonction polynôme** (ou **polynôme**) $P$ est une fonction de $C$ dans $C$ de la forme $P\left(z\right)=a\_{0}+a\_{1}z+a\_{2}z^{2}+…+a\_{n}z^{n}$, où $a\_{0}$, $a\_{1}$, $a\_{2}$, …, $a\_{n}$ ($a\_{n}\ne 0)$ sont les **coefficients** réels de $P$.

L’entier $n$ est appelé le **degré** du polynôme $P$.

Propriété : Si une fonction polynôme est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

2) Racine d’un polynôme

Définition : Soit un polynôme $P$. Un nombre complexe $a$ s’appelle **racine** de $P$ si $P\left(a\right)=0.$

Exemple :

Les nombres complexes $i$ et $-i$ sont les racines du polynôme $z^{2}+1$.

Théorème : Soit un polynôme $P$ définie par $P\left(z\right)=z^{n}-a^{n}$ où $n$ est un entier supérieur ou égal à 2.

Alors il existe un polynôme $Q$ de degré $n-1$, tel que $P\left(z\right)=\left(z-a\right)Q(z)$

Démonstration au programme :

- Si $a=0$ : C’est évident.

- Si $a=1$ :

On a : $z\left(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+…+z+1\right)=z^{n}+z^{n-1}+z^{n-2}+…+z^{2}+z$

$$ 1\left(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+…+z+1\right)=z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+…+z+1$$

En soustrayant membre à membre, on a :

 $\left(z-1\right)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+…+z+1\right)=z^{n}-1$

- Si $a\ne 0$ quelconque :

On remplace $z$ par $z/a$ dans l’égalité ci-dessus :

$$\left(\frac{z}{a}-1\right)\left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{z^{n-2}}{a^{n-2}}+\frac{z^{n-3}}{a^{n-3}}+…+\frac{z}{a}+1\right)=\frac{z^{n}}{a^{n}}-1$$

Soit en multipliant chaque membre par $a^{n}$ :

$$\left(z-a\right)\left(z^{n-1}+az^{n-2}+a^{2}z^{n-3}+…+a^{n-2}z+a^{n-1}\right)=z^{n}-a^{n}$$

Il existe donc un polynôme $Q\left(z\right)=z^{n-1}+az^{n-2}+a^{2}z^{n-3}+…+a^{n-2}z+a^{n-1}$ de degré $n-1$, tel que $P\left(z\right)=\left(z-a\right)Q(z)$.

Corollaire : Soit un polynôme $P$ de degré $n$. Si $a$ est une racine complexe de $P$, alors il existe un polynôme $Q$ de degré $n-1,$ tel que $P(z)=\left(z-a\right)Q(z)$.

Démonstration au programme :

Comme $a$ est une racine complexe de $P$, on a :$ P\left(a\right)=0.$

Donc :

$$P\left(z\right)=a\_{0}+a\_{1}z+a\_{2}z^{2}+…+a\_{n}z^{n}-P(a)$$

$$ =a\_{0}+a\_{1}z+a\_{2}z^{2}+…+a\_{n}z^{n}-a\_{0}-a\_{1}a-a\_{2}a^{2}-…-a\_{n}a^{n}$$

$$ =a\_{1}\left(z-a\right)+a\_{2}\left(z^{2}-a^{2}\right)+…+a\_{n}\left(z^{n}- a^{n}\right)$$

Or, pour tout $k$ compris entre 1 et $n$, il existe un polynôme $Q\_{k-1}$ de degré $k-1$, tel que : $z^{k}- a^{k}=\left(z-a\right)Q\_{k-1}(z)$.

Donc : $P\left(z\right)=a\_{1}\left(z-a\right)Q\_{0}(z)+a\_{2}\left(z-a\right)Q\_{1}(z)+…+a\_{n}\left(z-a\right)Q\_{n-1}(z)$

 $=\left(z-a\right)\left(a\_{1}Q\_{0}(z)+a\_{2}Q\_{1}(z)+…+a\_{n}Q\_{n-1}(z)\right)$

Il existe donc un polynôme $Q$ de degré $n-1$, tel que : $P\left(z\right)=\left(z-a\right)Q(z)$.

Corollaire : Un polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines.

Démonstration au programme :

Supposons que les nombres complexes $α\_{1},$ $α\_{2},$ …, $α\_{p}$ sont des racines deux à deux distincts du polynôme $P$.

Alors il existe un polynôme $Q\_{1}$ tel que : $P(z)=\left(z-α\_{1}\right)Q\_{1}(z)$.

Or, $0=P(α\_{2})=\left(α\_{2}-α\_{1}\right)Q\_{1}(α\_{2})$ et $α\_{2}-α\_{1}\ne 0$.

Donc $Q\_{1}\left(α\_{2}\right)=0.$

Ainsi, il existe un polynôme $Q\_{2}$ tel que : $Q\_{1}(z)=\left(z-α\_{2}\right)Q\_{2}(z)$.

Et donc : $P\left(z\right)=\left(z-α\_{1}\right)\left(z-α\_{2}\right)Q\_{2}\left(z\right).$

En continuant ainsi avec des polynômes $Q\_{3},$ $Q\_{4},$ … $Q\_{p}$, on obtient :

$$P\left(z\right)=\left(z-α\_{1}\right)\left(z-α\_{2}\right)\left(z-α\_{3}\right)…\left(z-α\_{p}\right)Q\_{p}\left(z\right).$$

On en déduit que le polynôme $P$ est de degré $p+degré(Q\_{p})\geq p$.

Méthode : Factoriser un polynôme dont une racine est connue

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1Y-JtI6nNXU**](https://youtu.be/1Y-JtI6nNXU)

Factoriser dans $C $le polynôme : $P\left(z\right)=z^{3}+z^{2}+4z+4$.

**Correction**

$P$ est un polynôme de degré 3, il admet au plus 3 racines.

On cherche une racine évidente de $P$ en testant des valeurs entières « autour de 0 ». On peut tester également $i$ ou $-i$.

Il sera ensuite aisé de déterminer la ou les autres racines qui sont au plus au nombre de 2.

On constate que $z=-1$ est une racine évidente de $P$ :

$$P\left(-1\right)=\left(-1\right)^{3}+\left(-1\right)^{2}+4\left(-1\right)+4=0$$

Donc, il existe un polynôme $Q$ de degré 2, tel que : $P(z)=\left(z+1\right)Q(z)$.

On a donc :

$$z^{3}+z^{2}+4z+4=\left(z+1\right)Q(z)$$

$$z^{3}+z^{2}+4z+4=\left(z+1\right)\left(az^{2}+bz+c\right)$$

$$z^{3}+z^{2}+4z+4=az^{3}+bz^{2}+cz+az^{2}+bz+c$$

$$z^{3}+z^{2}+4z+4=az^{3}+\left(b+a\right)z^{2}+\left(c+b\right)z+c$$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$\left\{\begin{array}{c}a=1 \\b+a=1\\c+b=4\\c=4 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{c}a=1\\b=0\\c=4\end{array}\right.$

On en déduit que : $Q\left(z\right)=z^{2}+4$.

Or, il est possible de factoriser $Q$ :

$$Q\left(z\right)=z^{2}+4=\left(z-2i\right)\left(z+2i\right)$$

En effet : $z^{2}+4=0 ⟺z=2i ou z=-2i$

On a ainsi : $P(z)=\left(z+1\right)\left(z-2i\right)\left(z+2i\right)$.

Méthode : Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/KqghKmQ9gOk**](https://youtu.be/KqghKmQ9gOk)

Résoudre dans $R$ l’équation $x^{3}+x^{2}-3x+1=0$.

**Correction**

On pose $P\left(x\right)=x^{3}+x^{2}-3x+1.$

On voit que $x=1$ est une racine évidente de $P$. Donc il existe un polynôme $Q$, de degré 2, tel que : $P(x)=(x-1)Q(x)$.

On a donc :

$$x^{3}+x^{2}-3x+1=(x-1)Q(x)$$

$$x^{3}+x^{2}-3x+1=(x-1)(ax^{2}+bx+c)$$

$$x^{3}+x^{2}-3x+1=ax^{3}+bx^{2}+cx-ax^{2}-bx-c$$

$$x^{3}+x^{2}-3x+1=ax^{3}+\left(b-a\right)x^{2}+\left(c-b\right)x-c$$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$\left\{\begin{array}{c}a=1 \\b-a=1 \\c-b=-3\\-c=1 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{c}a=1 \\b=2 \\c=-1\end{array}\right.$

Donc : $P\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x^{2}+2x-1\right).$

L’équation $x^{3}+x^{2}-3x+1=0$ peut s’écrire $\left(x-1\right)\left(x^{2}+2x-1\right)=0$.

Soit : $x-1=0$ ou $x^{2}+2x-1=0$

 $x=1$ $Δ=8$

$$ x=\frac{-2-\sqrt{8}}{2}=-1-\sqrt{2}$$

 ou $x=-1+\sqrt{2}$

$$S=\left\{-1-\sqrt{2} ; -1+\sqrt{2} ;1\right\}$$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)