NOMBRES COMPLEXES (Partie 2)

I. Formules de trigonométrie

1) Formules d'addition

Propriété : Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstrations :
On a vu que : $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$
Soit : $\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a + i\sin a) \times (\cos b + i\sin b)$
$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b)$

D'où :
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$

Remarques : En remplaçant b par $-b$, on a également les formules :
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Méthode : Transformer à l'aide des formules d'addition $a\ cos\ (\omega t) + b\ sin\ (\omega t)$ en $A\ cos\ (\omega t + \varphi)$

Vidéo https://youtu.be/8NdfUiLaZAc

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \sqrt{3}\cos(3t) + \sin(3t)$.
Écrire f sous la forme : $f(t) = A\cos(3t + \phi)$, avec A et ϕ à déterminer.

On a : $f(t) = \sqrt{3}\cos(3t) + 1\sin(3t)$.
On pose : $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$

On a alors : $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$$\frac{f(t)}{A} = \frac{\sqrt{3}\cos(3t) + 1\sin(3t)}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3t) + \frac{1}{2}\sin(3t)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3t) - \left(-\frac{1}{2}\right)\sin(3t)$$

Ceci dans l'idée de pouvoir appliquer la formule $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$

On cherche donc ϕ, tel que :

$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\sin\phi = -\frac{1}{2}$

$\phi = -\frac{\pi}{6}$ convient.

Ainsi, d'après la première formule d'addition, on a :

$$\frac{f(t)}{A} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos(3t) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin(3t) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + 3t\right)$$

Soit encore :

$$\frac{f(t)}{2} = \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(t) = 2\cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right).$$

<u>Méthode :</u> Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

Vidéo https://youtu.be/WcTWAazcXds

Calculer : $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2) <u>Formules de duplication</u>

<u>Propriété :</u> Soit a un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

<u>Démonstrations :</u>

Cas particulier des formules d'addition dans le cas où $a = b$:

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$

On a également : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc :

$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$

Et :

$\cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

<u>Méthode :</u> Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

Vidéo https://youtu.be/RPtAUI3oLco

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$

Donc :

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

et donc :

$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

car $\cos\frac{\pi}{8}$ est positif.

$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1-\cos^2\frac{\pi}{8} = 1-\frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

et donc :

$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

car $\sin\frac{\pi}{8}$ est positif.

3) Formules de linéarisation

Propriété : Soit a un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2a)$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2a)$$

Exemples d'application : Calcul de primitives de $x \longmapsto \cos^2 x$ et $x \longmapsto \sin^2 a$:

$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$ a pour primitive :

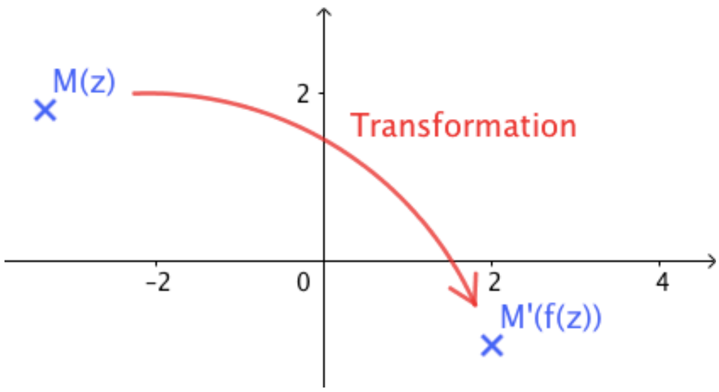
$$F(x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

$g(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$ a pour primitive :

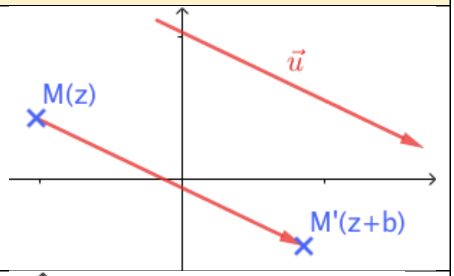
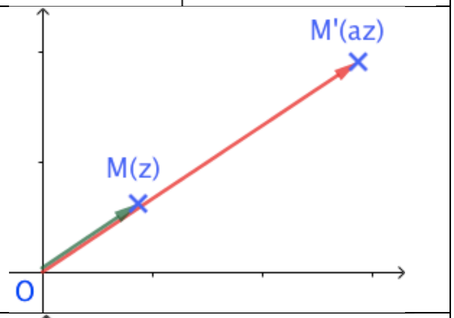
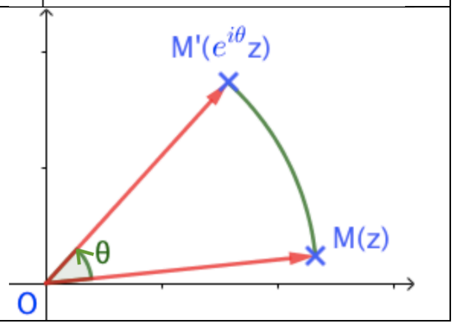
$$G(x) = \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)$$

II. Expression complexe des transformations

Soit un point M d'affixe z associé à un point M' d'affixe z' par une transformation du plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Il existe alors une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = z'$.
La fonction f permet d'exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.



Rappels sur les transformations vues en classe de 3e :
https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-troisieme#15

TRANSFORMATION	DÉFINITION	FONCTION ASSOCIÉE	FIGURE
Translation de vecteur $\vec{u}$ (d'affixe b)	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$f(z) = z + b$	
Homothétie de centre O et de rapport a (non nul)	$\overrightarrow{OM'} = a\,\overrightarrow{OM}$	$f(z) = az$	
Rotation de centre O et d'angle θ	$OM' = OM$ $\left(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$	$f(z) = e^{i\theta}z$	

Méthode : Interpréter géométriquement les transformations

Vidéo https://youtu.be/RsOCKGgT9h4

Soit les fonctions f, g et h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, données par les expressions suivantes :
$f(z) = (1 - i)(1 + i)z$; $g(z) = z - 2i$; $h(z) = -e^{i\frac{\pi}{3}}z$.
Reconnaître la nature des transformations qui sont associées à chaque fonction.
On précisera les éléments qui caractérisent ces transformations.

- $f(z)=(1-i)(1+i)z$
$=(1^2-i^2)z$
$=2z$

Donc f est l'homothétie de centre O et de rapport 2.

- $g(z)=z-2i$
$=z+(-2i)$

Donc g est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-2i$.

- $h(z)=-e^{i\frac{\pi}{3}}z$
$=(-1)\times e^{i\frac{\pi}{3}}z$
$=e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{3}}z$
$=e^{i\pi+i\frac{\pi}{3}}z$
$=e^{i\frac{4\pi}{3}}z$

Donc h est la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.