

NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 1/2

Partie 1 : Forme algébrique et conjugué (Rappels)

1) Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition : On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels.

Vocabulaire :

Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et le nombre b s'appelle la **partie imaginaire**. On note : $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$.

2) Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **nombre complexe conjugué** de z , le nombre, noté \bar{z} , égal à $a - ib$.

Méthode : Résoudre une équation dans \mathbb{C}

 **Vidéo** <https://youtu.be/qu7zGL5y4vI>

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $3z - 6 = 4i + z$ b) $3z - 2 = \bar{z} + 1$ c) $z^2 + 5 = 0$

Correction

a) $3z - 6 = 4i + z$

$$3z - z = 6 + 4i$$

$$2z = 6 + 4i$$

$$z = 3 + 2i$$

b) On pose : $z = a + ib$. L'équation s'écrit alors :

$$3(a + ib) - 2 = a - ib + 1$$

$$3a + 3ib - 2 - a + ib - 1 = 0$$

$$2a - 3 + 4ib = 0$$

$$\text{Donc : } 2a - 3 = 0 \text{ et } 4b = 0$$

$$\text{Soit : } a = \frac{3}{2} \text{ et } b = 0$$

$$\text{D'où : } z = \frac{3}{2}$$

c) $z^2 + 5 = 0$

$$z^2 = -5$$

$$z^2 = 5i^2$$

$$\text{Donc : } z = i\sqrt{5} \text{ ou } z = -i\sqrt{5}$$

Les solutions sont donc $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

3) Affixe

Définitions : a et b sont deux nombres réels.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et tout vecteur \vec{w} de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

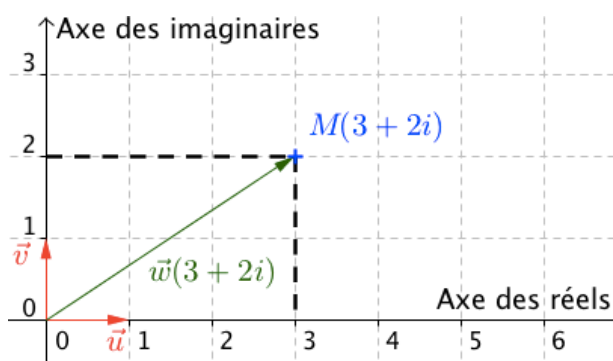
- À tout point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et à tout vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affiche** du point M et **affiche** du vecteur \vec{w} .
On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple :

▶ Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

Le point $M(3 ; 2)$ a pour affiche le nombre complexe $z = 3 + 2i$.

De même, le vecteur \vec{w} a pour affiche $z = 3 + 2i$.

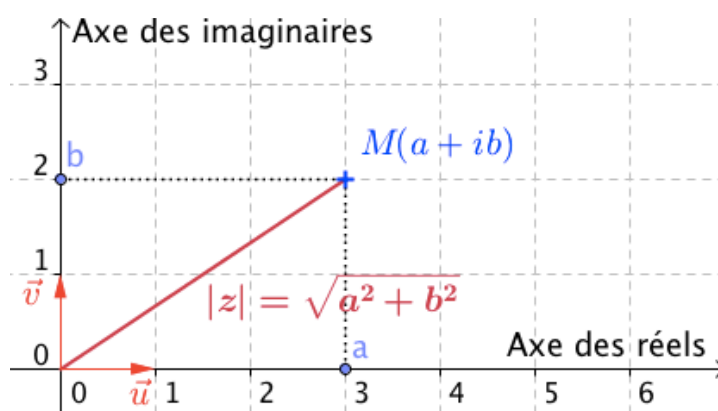
4) Module d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle **module** de z , le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

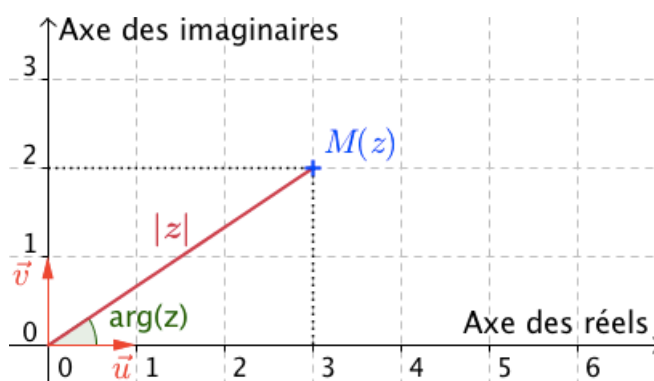
M est un point d'affixe z .

Alors le module de z est égal à la distance OM .

5) Argument d'un nombre complexe

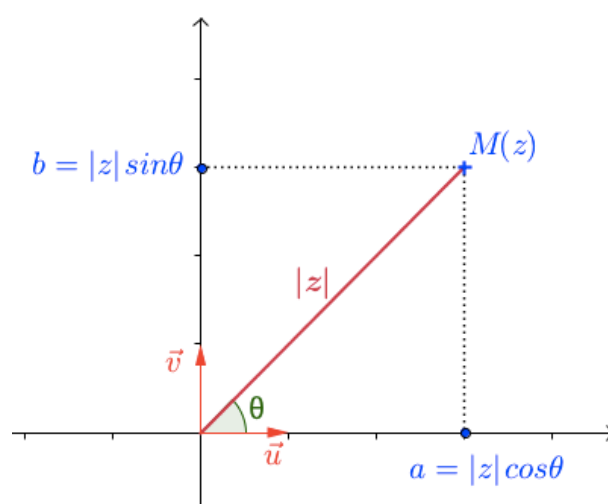
Définition : Soit un point M d'affixe z non nul.

On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.



6) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $\theta = \arg(z)$.



Partie 2 : Forme exponentielle d'un nombre complexe

1) Définition

Définition : Pour tout réel θ , on a : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Remarque :

$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Propriété : $e^{i\pi} = -1$

Démonstration :

$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \times 0 = -1$



Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre e), l'algèbre (avec le nombre i) et la géométrie (avec le nombre π).

Exemples :

$$e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \times 0 = 1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$$

Définition : Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z = re^{i\theta}$.

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

▶ Vidéo https://youtu.be/WSW6DIbCS_0

▶ Vidéo <https://youtu.be/tEKJVKKQazA>

▶ Vidéo <https://youtu.be/zdxRt5poJp0>

1) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $z_1 = -2i$

b) $z_2 = -3$

c) $z_3 = \sqrt{3} - 3i$

2) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) $z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Correction

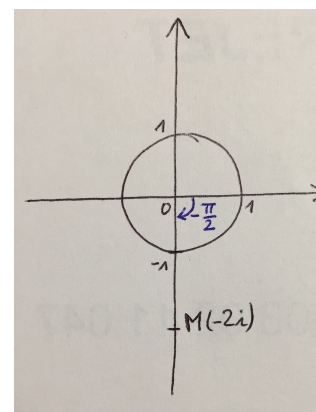
1) a) - $|z_1| = |-2i| = |-2| \times |i| = 2 \times 1 = 2$

- Pour déterminer un argument de z_1 , on peut utiliser le cercle trigonométrique.

On fait un petit schéma à main levée en plaçant le point M d'affixe z_1 et on lit graphiquement qu'un **argument** de z_1 est

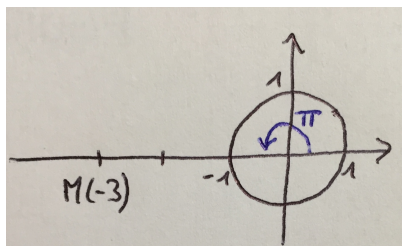
$$-\frac{\pi}{2}$$

Ainsi, on a : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.



b) - $|z_2| = |-3| = 3$

- On place le point M d'affixe z_2 et on lit graphiquement qu'un argument de z_2 est π .



Ainsi, on a : $z_2 = 3e^{i\pi}$.

$$c) |z_3| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

- Il n'est pas évident de déterminer graphiquement un argument de z_3 . La méthode consiste alors à calculer $\frac{z_3}{|z_3|}$:

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3i}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z_3 tel que :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Comme, on a :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'argument $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient. Et ainsi :

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Soit :

$$z_3 = |z_3| \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$2) a) z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$b) z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$

2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels θ et θ' ,

$$a) e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad b) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad c) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$d) \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad f) (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Méthode : Appliquer la notation exponentielle

 Vidéo <https://youtu.be/8EVfyqyVBKc>

1) Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.

2) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

$$a) iz \quad b) i\bar{z} \quad c) -\frac{2i}{z}$$

Correction

$$1) z = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$2) \text{ a) } iz = 2ie^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{b) } i\bar{z} = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{c) } -\frac{2i}{z} = \frac{2 \times (-i)}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales