NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 4/4

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/ABo2m52oEYw**](https://youtu.be/ABo2m52oEYw)

**Partie 1 : Applications des nombres complexes à la géométrie**

Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé direct .

Propriété : , et sont trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives et . On a :

Démonstrations :

a) On considère un point , d’affixe tel que .

Alors :

Comme , donc

b) a pour affixe .

Donc et donc .

c)

Méthode : Utiliser les nombres complexes en géométrie

 **Vidéo** [**https://youtu.be/NjLZfbqRFB0**](https://youtu.be/NjLZfbqRFB0)

Soit , et trois points d'affixes respectives , et

.

a) Démontrer que le triangle est isocèle en .

b) Démontrer que le triangle est rectangle en .

**Correction**

Donc = , et donc le triangle est isocèle en .

On en déduit que l'angle est droit et donc le triangle est rectangle en .

Méthode : Déterminer un ensemble de points

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WTXu19XC9Lw**](https://youtu.be/WTXu19XC9Lw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/5puq7tzMZAo**](https://youtu.be/5puq7tzMZAo)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/r6RO4ifOf70**](https://youtu.be/r6RO4ifOf70)

Soit un point d’affixe . Dans chaque cas, déterminer et représenter :

a) L’ensemble des points tels que .

b) L’ensemble des points tels que .

c) L’ensemble des points tels que .

d) L’ensemble des points tels que .

e) L’ensemble des points tels que .

f) L’ensemble des points tels que .

**Correction**

a) Soit le point d’affixe alors s’écrit :

. En effet : .

L’ensemble des points est le cercle de centre et

de rayon 3.



b)

Soit le point d’affixe alors s’écrit .

En effet : .

L’ensemble des points est le cercle de centre et de rayon 1.

c)

Soit le point d’affixe et le point d’affixe 5 alors

s’écrit .

L’ensemble des points est la médiatrice du segment



d) .

Soit , en notant que .

Soit encore :

On pose , alors l’équation s’écrit :

L’ensemble des points est le cercle de centre et de rayon .



e) L’ensemble des points M est la bissectrice de l’angle

formé par l’axe des abscisses et l’axe des ordonnées

privée de l’origine.

f)

Soit le point d’affixe alors s’écrit :

En effet,

L’ensemble des points M est la demi-droite d’origine privée de et passant par le point .

**Partie 2 : Racine n-ième de l’unité**

 1) Détermination de l’ensemble

On cherche à déterminer l’ensemble des nombres complexes vérifiant l’égalité avec

Définition : Une **racine -ième de l’unité** est un nombre complexe vérifiant avec

Théorème : L’ensemble des racines -ième de l’unité possède exactement racines :

, avec entier compris entre et .

Démonstration au programme :

Existence :

Si alors et donc .

On cherche ainsi, les nombres complexes de la forme , avec .

Soit :

, avec .

, avec .

On peut ainsi restreindre les valeurs prisent par à l’ensemble des entiers compris entre et .

Donc , avec entier compris entre et , est une racine -ième de l’unité.

Unicité :

Supposons qu’il existe entier compris entre et , tel que

Alors :

, avec .

Donc divise .

Or est un entier compris entre et . Donc ne peut pas diviser .

Et donc . Soit .

Méthode : Résoudre une équation en utilisant les racines de l’unité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PZWgjj\_7G7c**](https://youtu.be/PZWgjj_7G7c)

Résoudre dans les équations suivantes : a) b)

**Correction**

a)

 est une racine 3-ième de l’unité.

On a : , avec entier compris entre et .

Soit : ou ou

Soit : ou ou

b)

 est une racine 5-ième de l’unité.

On a : , avec entier compris entre et .

Soit : ou ou ou ou .

Soit : ou ou ou ou .

Soit : ou ou ou ou .

Soit : ou ou ou ou .

Soit : ou ou ou ou .

 2) Représentation géométrique



 a) Cas  :

Si on applique le théorème ci-dessus, les racines de l’équation sont :

On peut ainsi représenter les racines 2-ième de l’unité sur le cercle trigonométrique. En effet, on a vu que les racines n-ième de l’unité ont pour module 1.



 b) Cas  :

Les racines de l’équation sont :

, ,

On peut ainsi représenter les racines 3-ième de l’unité sur le cercle trigonométrique.

Par convention, on note habituellement :

 et .

L’ensemble des points dont les affixes sont les racines 3-ième de l’unité forment un triangle équilatéral.

 c) Cas  :

Les racines de l’équation sont :

, , ,

.

On peut ainsi représenter les racines 4-ième de l’unité sur le cercle trigonométrique.

L’ensemble des points dont les affixes sont les racines 4-ième de l’unité forment un carré.



De façon générale, l’ensemble des points dont les affixes sont les racines n-ième de l’unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Méthode : Utiliser les racines de l’unité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/cqK\_IGw\_0fE**](https://youtu.be/cqK_IGw_0fE)

Démontrer que le périmètre d’un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à .

**Correction**

Les images des racines 5-ième de l’unité forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Ainsi pour calculer le périmètre du pentagone, il suffit de calculer la longueur d’un côté du pentagone.

Soit par exemple :

Soit, en appliquant une formule d’Euler :

On en déduit que le périmètre du pentagone est égal à .

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)