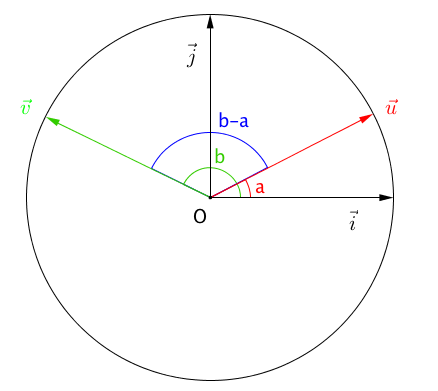
NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 3/4

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/ABo2m52oEYw**](https://youtu.be/ABo2m52oEYw)

**Partie 1 : Formules de trigonométrie**

1) Formules d'addition

Propriété : Soit et deux nombres réels quelconques. On a :

Démonstrations aux programmes :

**- 1ère formule :**

On considère un repère orthonormé

du plan et le cercle trigonométrique de centre O.

et sont deux vecteurs de norme 1 tels que :

et .

On a alors : et .

Ainsi :

On a également :

D'où :

**- 2e formule :**

**- 3e formule :**

**- 4e formule :**

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WcTWAazcXds**](https://youtu.be/WcTWAazcXds)

Calculer : et

**Correction**

2) Formules de duplication

Propriété : Soit un nombre réel quelconque. On a :

Démonstrations :

Cas particulier des 2e et 4e formules d'addition dans le cas où :

On a également : donc :

Et :

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RPtAUl3oLco**](https://youtu.be/RPtAUl3oLco)

Calculer et

**Correction**

Donc :

et donc :

car est positif.

et donc :

car est positif.

Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/yx3yULqR\_wI**](https://youtu.be/yx3yULqR_wI)

Résoudre dans l'équation .

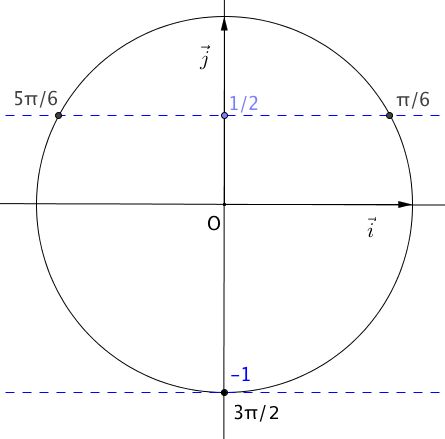
**Correction**

soit d’après une formule de duplication.

On pose , l'équation s'écrit alors :

Soit :

L'équation du second degré possède deux solutions distinctes :

Résolvons alors dans les équations : et :

Ainsi :

**Partie 2 : Forme exponentielle d’un nombre complexe**

1) Définition

Posons .

On prend et on a vu dans le chapitre 2/3 que :

soit :

Soit : .

On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles : .

Définition : Pour tout réel , on a : .

Remarque :

est le nombre complexe de module 1 et d'argument .

Propriété :

Démonstration :



Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre *e*), l'algèbre (avec le nombre *i*) et la géométrie (avec le nombre ).

Exemples :

Définition : Tout nombre complexe non nul de module et d'argument s'écrit sous sa **forme exponentielle** .

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

**Vidéo** [**https://youtu.be/WSW6DIbCS\_0**](https://youtu.be/WSW6DIbCS_0)



 **Vidéo** [**https://youtu.be/tEKJVKKQazA**](https://youtu.be/tEKJVKKQazA)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zdxRt5poJp0**](https://youtu.be/zdxRt5poJp0)

1) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

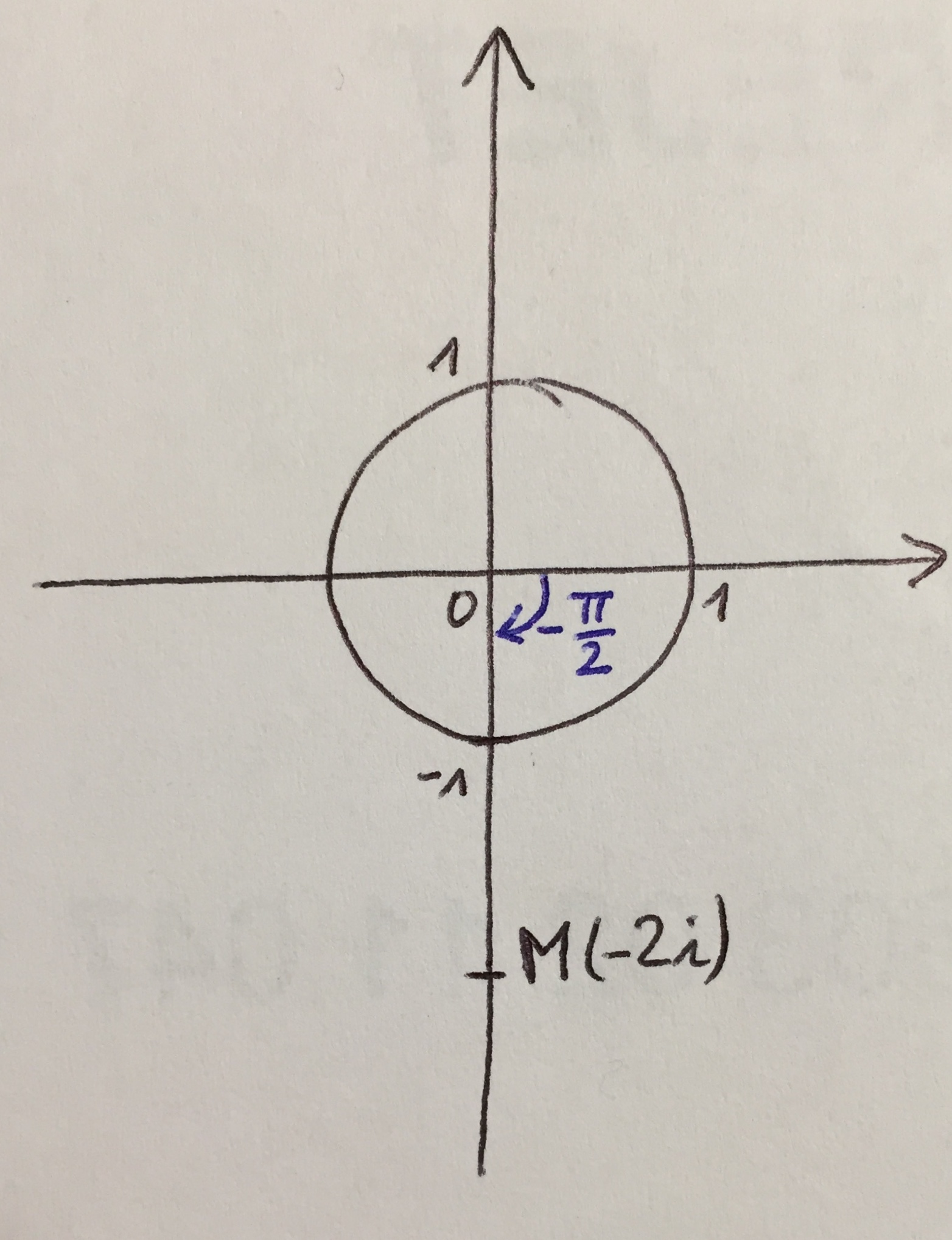
a) b) c)

2) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) b)

**Correction**

1) a) -

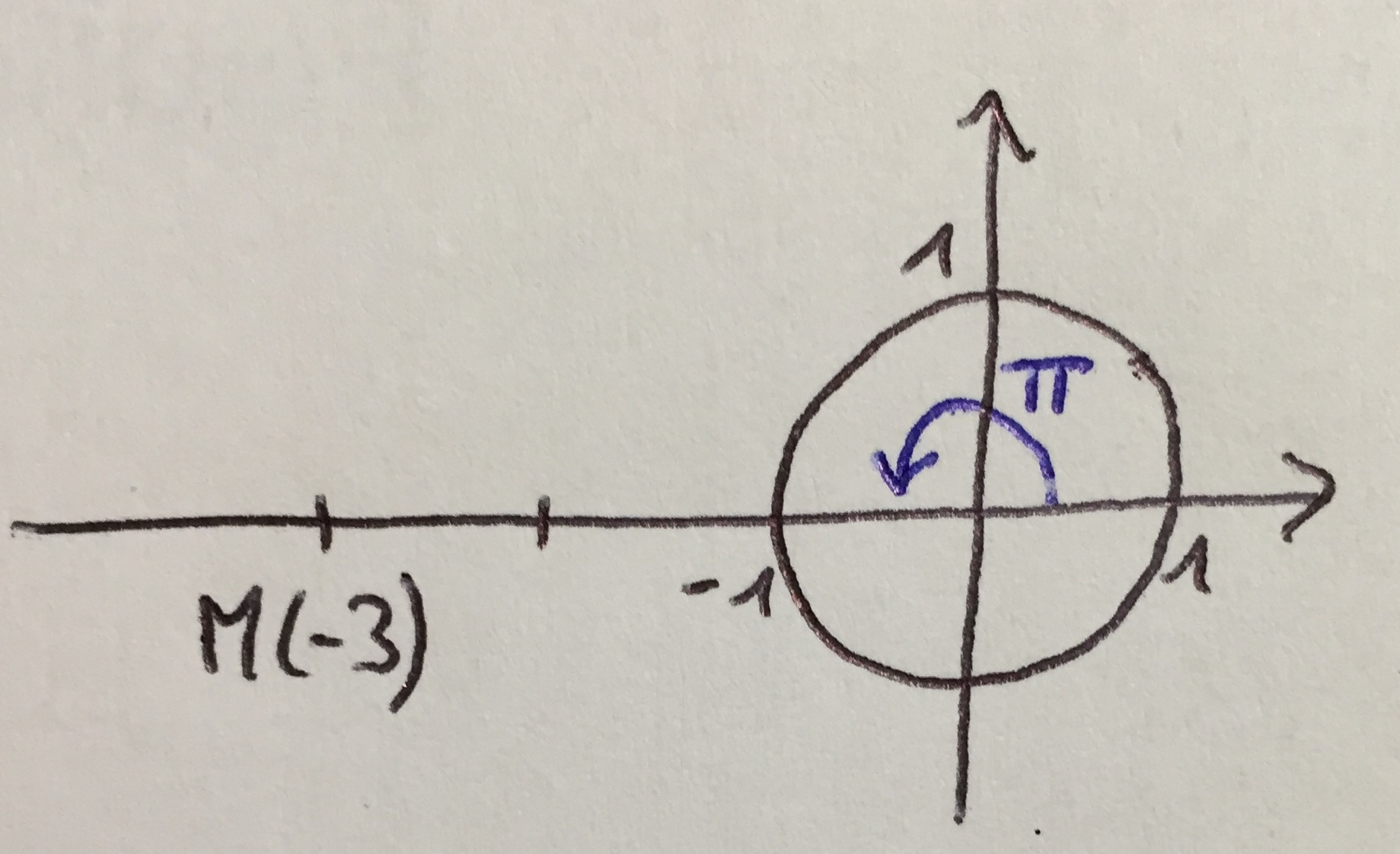
 - Pour déterminer un argument de , on peut utiliser le cercle trigonométrique.

On fait un petit schéma à main levée en plaçant le point d’affixe et on lit graphiquement qu’un argument de est .

Ainsi, on a : .

b) -

- On place le point d’affixe et on lit graphiquement qu’un argument de est .



Ainsi, on a : .

c)

- Il n’est pas évident de déterminer graphiquement un argument de . La méthode consiste alors à calculer  :

On cherche donc un argument de tel que :

Comme, on a :

L'argument convient. Et ainsi :

Soit :

2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels  et ,

a) b) c) d)

Méthode : Appliquer la notation exponentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8EVfyqyVBKc**](https://youtu.be/8EVfyqyVBKc)

1) Déterminer la forme exponentielle de .

2) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

a) b) c)

**Correction**

1)

2) a)

b)

c) =

3) Formules de Moivre et d’Euler

Formule de Moivre : Pour tous réels  et , pour tout entier naturel non nul :

Que l’on peut également écrire :

Méthode : Appliquer la formule de Moivre

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RU2C4i3n5Ik**](https://youtu.be/RU2C4i3n5Ik)

Exprimer en fonction de .

**Correction**

Or, selon la formule de Moivre :

, en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit :

On en déduit que :

Or, , donc :

Formules d’Euler : Pour tout réel :

Méthode : Appliquer les formules d’Euler

 **Vidéo** [**https://youtu.be/p6TncUjPKfQ**](https://youtu.be/p6TncUjPKfQ)

a) Linéariser (\*) l’expression.

b) En déduire une primitive de la fonction .

(\*) Linéariser une telle expression consiste à la ramener comme somme d’expressions du type et

**Correction**

a) On applique une formule d’Euler :

en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit encore :

b) Ainsi, chercher une primitive de revient à chercher une primitive de .

Une primitive de la fonction est la fonction :

**DIVERTISSEMENT**

Une démonstration avec les nombres complexes de la célèbre égalité .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)