NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 2/4

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/ABo2m52oEYw

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.

Partie 1 : Représentation dans le plan complexe

1) Définitions

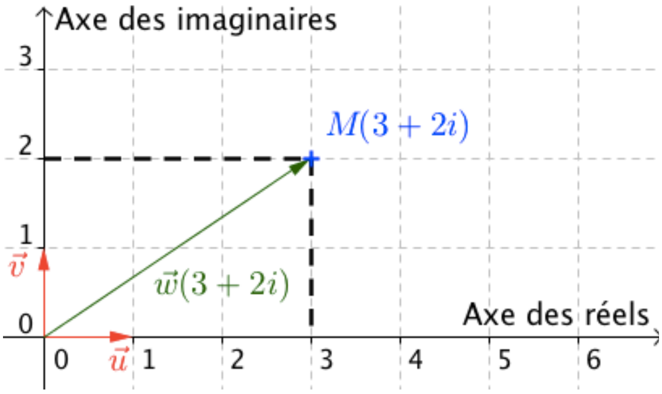
Définitions : a et b sont deux nombres réels.
- À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $\binom{a}{b}$ et tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$.
- À tout point $M\binom{a}{b}$ et à tout vecteur $\vec{w}\binom{a}{b}$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

Le point $M\binom{3}{2}$ a pour affixe le nombre complexe $z = 3 + 2i$.
De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z = 3 + 2i$.



2) Propriétés

Propriétés : $M(z_M)$ et $N(z_N)$ sont deux points du plan.
$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont deux vecteurs du plan.

a) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$.

b) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.

c) Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz.

d) Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2}$

Démonstrations :

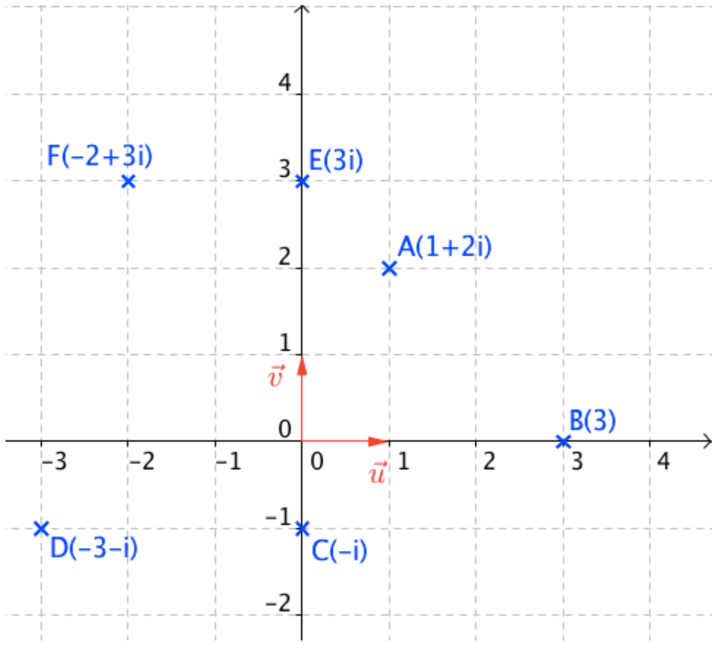
a) On pose : $M\binom{x_M}{y_M}$ et $N\binom{x_N}{y_N}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\binom{x_N - x_M}{y_N - y_M}$ donc son affixe est égal à :

$(x_N - x_M) + i(y_N - y_M) = x_N + iy_N - (x_M + iy_M) = z_N - z_M$.

b) c) et d) : Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Autres exemples :



Méthode : Utiliser l'affixe d'un point en géométrie

Vidéo https://youtu.be/m9yM6kw1ZzU

On considère les points $A(-2+3i)$, $B(2+4i)$, $C(5+3i)$, $D(1+2i)$ et $E(-7)$.

a) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Calculer l'affixe de son centre.

b) Les points D, C et E sont-ils alignés ?

Correction

a) - On va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + 4i - (-2 + 3i) = 4 + i$

Affixe de $\overrightarrow{DC}$: $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 5 + 3i - (1 + 2i) = 4 + i$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

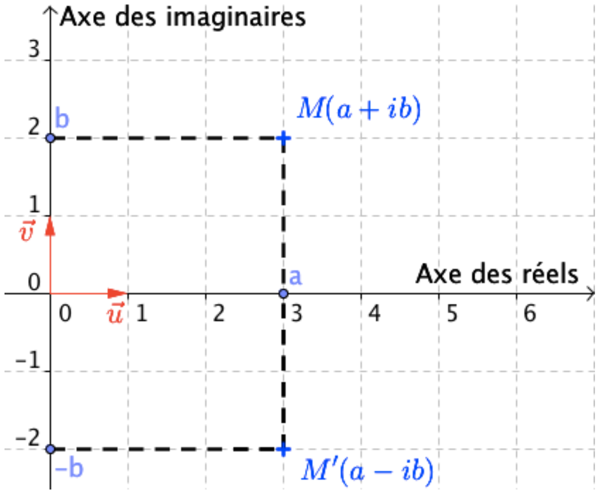
- Le centre du parallélogramme est le milieu I du segment $[AC]$. Son affixe est :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2 + 3i + 5 + 3i}{2} = \frac{3 + 6i}{2} = \frac{3}{2} + 3i$$

b) On va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
Affixe de $\overrightarrow{DC}$: $z_{\overrightarrow{DC}} = 4 + i$
Affixe de $\overrightarrow{DE}$: $z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = -7 - (1 + 2i) = -8 - 2i$.
Donc : $z_{\overrightarrow{DE}} = -2\, z_{\overrightarrow{DC}}$ et donc $\overrightarrow{DE} = -2\,\overrightarrow{DC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et donc les points D, C et E sont alignés.

3) Image d'un conjugué

Remarque :
Les images M et M' de z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

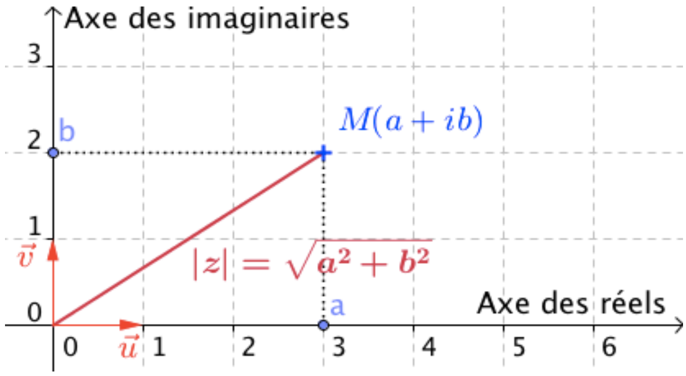


Partie 2 : Module et argument d'un nombre complexe

1) Module

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance OM.



Propriétés : Soit z un nombre complexe.
a) $|z|^2 = z\bar{z}$ b) $|\bar{z}| = |z|$ c) $|-z| = |z|$

Démonstrations (dont *a)* au programme) :
a) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

b) $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

c) $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.	
Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$
Puissance	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
Inverse	$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$
Quotient	$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$

Démonstrations au programme :

- Module d'un produit :

$|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = zz' \times \bar{z}\,\overline{z'} = z \times \bar{z} \times z' \times \overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2 = (|z| \times |z'|)^2$.

Comme $|z|$, $|z'|$ et $|zz'|$ sont positifs, on a : $|zz'| = |z||z'|$

- Module d'une puissance :

On procède par récurrence.

- Initialisation pour $n = 2$ (trivial pour $n = 1$) : $|z^2| = |z \times z| = |z| \times |z| = |z|^2$, d'après la propriété du produit.
- Hérédité :

  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie : $|z^k| = |z|^k$.

  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k + 1$: $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$.

  $|z^{k+1}| = |z^k z|$

  $= |z^k||z|$, d'après la propriété du produit.

  $= |z|^k|z|$, par hypothèse de récurrence.

  $= |z|^{k+1}$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul, soit : $|z^n| = |z|^n$.

Méthode : Calculer le module d'un nombre complexe

Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4

Vidéo https://youtu.be/i85d2fKv34w

Calculer : a) $|3 - 2i|$ b) $|\overline{-3i}|$ c) $|\sqrt{2} + i|$ d) $\left|\frac{-3i}{(\sqrt{2}+i)^2}\right|$

Correction

a) $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

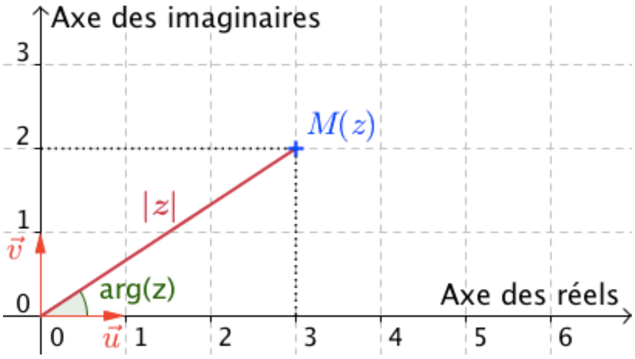
b) $|\overline{-3i}| = |-3i| = |-3||i| = 3 \times 1 = 3$

c) $|\sqrt{2} + i| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

d) $\left|\frac{-3i}{(\sqrt{2}+i)^2}\right| = \frac{|-3i|}{\left|(\sqrt{2}+i)^2\right|} = \frac{|-3i|}{|\sqrt{2}+i|^2} = \frac{3}{\sqrt{3}^2} = 1$

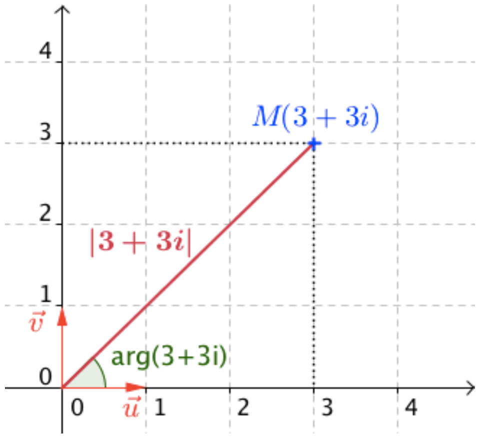
2) Argument

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle **argument** de z, noté $arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.



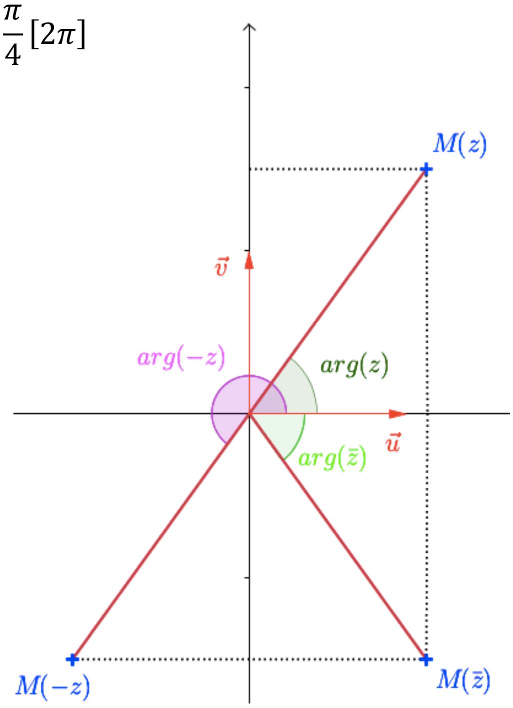
Remarques :
- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On notera $arg(z)$ modulo 2π ou $arg(z)$ $[2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.

Exemple :



Soit $z = 3 + 3i$.
Alors $|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
$$arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul.
a) z est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(z) = 0[\pi]$.
b) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
c) $arg(\bar{z}) = -arg(z)$
d) $arg(-z) = arg(z) + \pi$



Démonstrations :
a) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.
b) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.
c) d) Ces résultats se déduisent par symétrie.

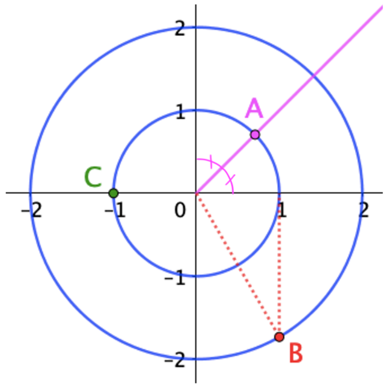
Méthode : Déterminer géométriquement un argument

Vidéo https://youtu.be/NX3pzPL2gwc

a) Déterminer un argument de chaque affixe des points A, B et C.
b) Placer les points D et E d'affixes respectives z_D et z_E telles que :

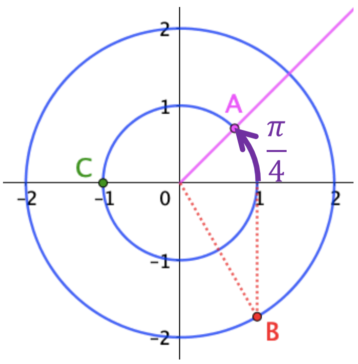
$|z_D| = 2$ et $\arg(z_D) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

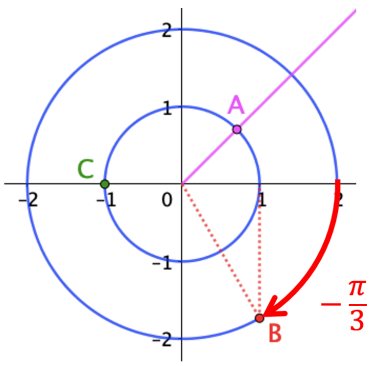
$|z_E| = 3$ et $\arg(z_E) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

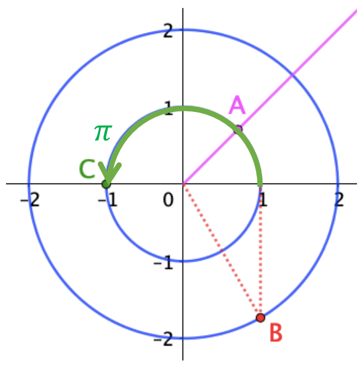


Correction

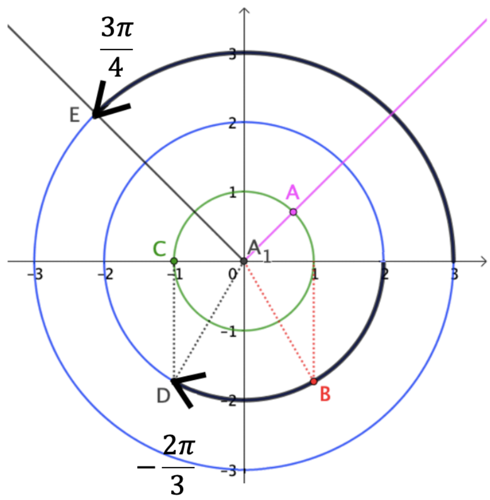
a) $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ $\arg(z_C) = \pi[2\pi]$







b) Le point D appartient au cercle de rayon 2 car $|z_D| = 2$.
Le point E appartient au cercle de rayon 3 car $|z_E| = 3$.



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.	
Produit	$arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
Puissance	$arg(z^n) = n\, arg(z)$
Inverse	$arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg\,(z)$
Quotient	$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\,(z) - arg\,(z')$

Partie 3 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

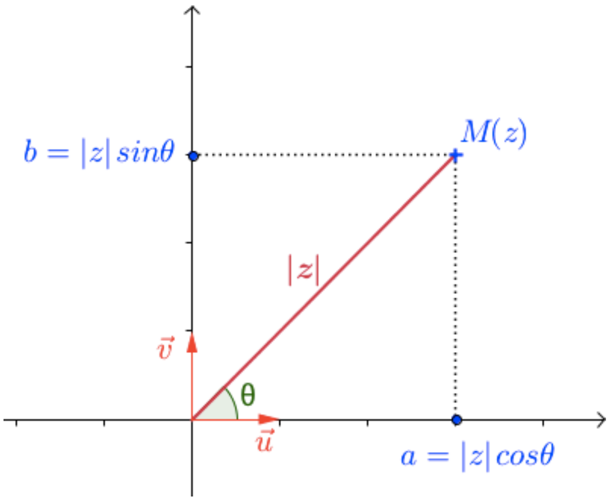
1) Définition

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = arg\ (z)$
On a alors : $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

En effet, en considérant le triangle rectangle, on a :

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|}$$



Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = arg\ (z)$.

Méthode : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/kmb3-hNiBq8
Vidéo https://youtu.be/zIbpXlgISc4
Vidéo https://youtu.be/RqRQ2m-9Uhw

1) Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :
$a)\ z_1 = 3(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)$ $\quad b)\ z_2 = \sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
2) Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :
$a)\ z_3 = -5i$ $\quad c)\ z_4 = \sqrt{3} + i$

Correction

1) $a)\ z_1 = 3(cos\,\pi + i\,sin\,\pi) = 3(-1 + i \times 0) = -3.$

$b)\ z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) $a)\ |z_3| = |-5i| = 5$
Géométriquement (cercle trigo), on peut affirmer que : $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
Donc : $z_3 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

$b)$ - On commence par calculer le module de z_4 :

$$|z_4| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

- En calculant $\frac{z_4}{|z_4|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z_4 et sa partie imaginaire :

$$\frac{z_4}{|z_4|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z_4 tel que :

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ convient, en effet :

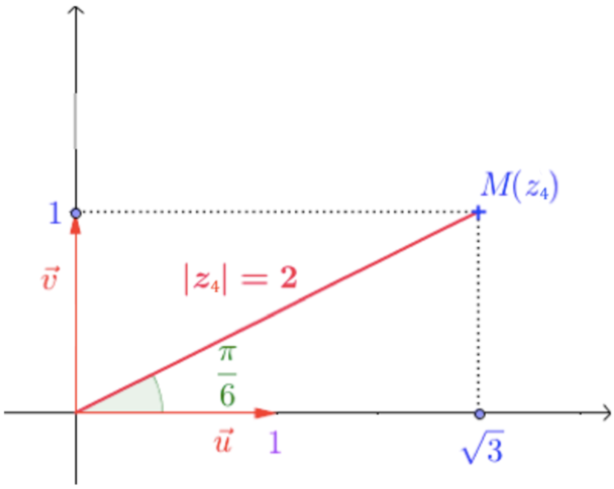
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

On a ainsi :

$$\frac{z_4}{|z_4|} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

Et donc :

$$z_4 = |z_4|\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$



Partie 4 : Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

1) Cercle trigonométrique

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, qui se représente géométriquement par le cercle trigonométrique.

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$.
On a alors $a^2 + b^2 = 1$.

2) Stabilité de $\mathbb{U}$

Méthode : Prouver que $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse

Vidéo https://youtu.be/XTNKoNfFopw

Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.

Démontrer que zz' et $\frac{1}{z}$ appartiennent à $\mathbb{U}$.

Correction

- $|zz'| = |z||z'|$
$= 1 \times 1$ car z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$.
$= 1$

Donc le produit zz' a pour module 1 et appartient donc à $\mathbb{U}$.

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit.

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

$= \frac{1}{1}$ car z appartient à $\mathbb{U}$.

$= 1$

Donc l'inverse $\frac{1}{z}$ a pour module 1 et appartient donc à $\mathbb{U}$.

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse.