NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 2/4

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/ABo2m52oEYw**](https://youtu.be/ABo2m52oEYw)

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct .

**Partie 1 : Représentation dans le plan complexe**

 1) Définitions

Définitions : et sont deux nombres réels.

- À tout nombre complexe , on associe son **image**, le point de coordonnées et tout vecteur de coordonnées .

- À tout point et à tout vecteur, on associe le nombre complexe

 appelé **affixe** du point et **affixe** du vecteur .

On note et

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/D\_yFqcCy3iE**](https://youtu.be/D_yFqcCy3iE)

Le point a pour affixe le nombre complexe .

De même, le vecteur a pour affixe .



 2) Propriétés

Propriétés : et sont deux points du plan.

 et sont deux vecteurs du plan.

a) Le vecteur a pour affixe .

b) Le vecteur a pour affixe .

c) Le vecteur , réel, a pour affixe .

d) Le milieu du segment a pour affixe

Démonstrations :

a) On pose : et .

Le vecteur a pour coordonnées donc son affixe est égal à :

.

b) c) et d) : Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Autres exemples :



Méthode : Utiliser l’affixe d’un point en géométrie

 **Vidéo** [**https://youtu.be/m9yM6kw1ZzU**](https://youtu.be/m9yM6kw1ZzU)

On considère les points , , , et .

a) Démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme. Calculer l’affixe de son centre.

b) Les points , et sont-ils alignés ?

**Correction**

a) - On va démontrer que les vecteurs et sont égaux.

Affixe de  :

Affixe de  :

Donc et donc est un parallélogramme.

 - Le centre du parallélogramme est le milieu du segment . Son affixe est :

b) On va démontrer que les vecteurs et sont colinéaires.

Affixe de  :

Affixe de  : .

Donc : et donc

Les vecteurs et sont colinéaires et donc les points , et sont alignés.



 3) Image d’un conjugué

Remarque :

Les images et de et sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

**Partie 2 : Module et argument d’un nombre complexe**

 1) Module

Définition : Soit un nombre complexe .

On appelle **module** de , le nombre réel positif, noté , égal à .

 est un point d'affixe .

Alors le module de est égal à la distance .

Propriétés : Soit un nombre complexe.

a) b) c)

Démonstrations (dont *a)* au programme) :

a)

b)

c)

|  |
| --- |
| Propriétés : Soit et deux nombres complexes non nuls et entier naturel non nul. |
| Produit |  |
| Puissance |  |
| Inverse |  |
| Quotient |  |

Démonstrations au programme :

- Module d’un produit :

Comme , et sont positifs, on a :

- Module d’une puissance :

On procède par récurrence.

* Initialisation pour  (trivial pour ) : , d’après la propriété du produit.
* Hérédité :

 - Hypothèse de récurrence :

 Supposons qu'il existe un entier tel que la propriété soit vraie : .

 - Démontrons que : La propriété est vraie au rang :.

, d’après la propriété du produit.

, par hypothèse de récurrence.

* Conclusion :

La propriété est vraie pour et et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul, soit : .

Méthode : Calculer le module d’un nombre complexe

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4**](https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/i85d2fKv34w**](https://youtu.be/i85d2fKv34w)

Calculer : a) b)   c) d)

**Correction**

a) b)

c)

d)

 2) Argument

Définition : Soit un point d'affixe non nulle.

On appelle **argument** de , noté une mesure, en radians, de l'angle .



Remarques :

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme , .

On notera modulo ou

- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle n'est pas défini.

Exemple :



Soit .

Alors

Propriétés : Soit un nombre complexe non nul.

a) est un nombre réel .

b) est un imaginaire pur .

c)

d)

Démonstrations :

a) Le point M d'affixe appartient à l'axe des réels.

b) Le point M d'affixe appartient à l'axe des imaginaires.

c) d) Ses résultats se déduisent par symétrie.

Méthode : Déterminer géométriquement un argument

 **Vidéo** [**https://youtu.be/NX3pzPL2gwc**](https://youtu.be/NX3pzPL2gwc)

a) Déterminer un argument de chaque affixe

des points A, B et C.

b) Placer les points D et E d’affixes respectives et

telles que :

 et

 et

**Correction**

a)





b) Le point D appartient au cercle de rayon 2 car .

Le point E appartient au cercle de rayon 3 car .

|  |
| --- |
| Propriétés : Soit et deux nombres complexes non nuls et entier naturel non nul. |
| Produit |  |
| Puissance |  |
| Inverse |  |
| Quotient |  |

**Partie 3 : Forme trigonométrique d’un nombre complexe**

1) Définition

 Propriété : Soit un nombre complexe non nul. On pose :

On a alors : et .



En effet, en considérant le triangle rectangle, on a :

Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe non nul l'écriture avec .

Méthode : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et réciproquement

 **Vidéo** [**https://youtu.be/kmb3-hNiBq8**](https://youtu.be/kmb3-hNiBq8)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zIbpXlgISc4**](https://youtu.be/zIbpXlgISc4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RqRQ2m-9Uhw**](https://youtu.be/RqRQ2m-9Uhw)

1) Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

2) Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

**Correction**

Géométriquement (cercle trigo), on peut affirmer que : .

Donc : .

 - On commence par calculer le module de :

- En calculant , on peut identifier plus facilement la partie réelle de et sa partie imaginaire :



On cherche donc un argument de tel que :

 convient, en effet :

On a ainsi :

Et donc :

**Partie 4 : Ensemble 𝕌 des nombres complexes de module 1**

 1) Cercle trigonométrique

L’ensemble des points du plan complexe  dont l’affixe appartient au cercle de centre O et de rayon 1 est noté 𝕌. Ce cercle s’appelle le cercle trigonométrique.

Propriété : Soit un nombre complexe appartenant à 𝕌.

On a alors

 2) Stabilité de 𝕌

Méthode : Prouver que 𝕌 est stable par produit et passage à l’inverse

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XTNKoNfFopw**](https://youtu.be/XTNKoNfFopw)

Soit et deux nombres complexes appartenant à 𝕌.

Démontrer que et appartiennent à 𝕌.

**Correction**

-

 car et appartiennent à 𝕌.

Donc le produit a pour module 1 et appartient donc à 𝕌.

On dit que 𝕌 est stable par produit.

-

 car appartient à 𝕌.

Donc l’inverse a pour module 1 et appartient donc à 𝕌.

On dit que 𝕌 est stable par passage à l’inverse.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)